

**UNVOLLSTÄNDIGE DATEN
IN DER COMPUTER-TOMOGRAPHIE**

ALEXANDER BARTMANN

Unvollständige Daten
in der
Computer – Tomographie

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Alexander Bartmann
aus München

München, 1986

1. Berichterstatter : Prof. Dr. G. Hämmerlin
2. Berichterstatter : Prof. Dr. A. Sachs

Dissertation eingereicht am 18.6.1986
Tag der mündlichen Prüfung : 28.7.1986

I n h a l t

Einleitung und geschichtlicher Rückblick	1
---	----------

Kapitel I : Einführung

§ 1 : Die Radontransformation in der Computer - Tomographie	5
§ 2 : Wichtige Eigenschaften der Radontransformation ..	9

Kapitel II : Unvollständige Daten in der Computer - Tomographie

§ 3 : Hohle Projektionen	13
§ 4 : Beschnittene Projektionen	31
§ 5 : Angularbeschränkte Projektionen	49
§ 6 : Schlußfolgerungen für die Bildrekonstruktion aus unvollständigen Daten	62

Zusammenfassung	78
------------------------------	-----------

Literatur	81
------------------------	-----------

Einleitung und geschichtlicher Rückblick

Der spätere Nobelpreisträger der Medizin A. M. Cormack gab in seinen 1963 und 1964 erschienenen Arbeiten ([6], [7]) einen Algorithmus an, mit dem eine Funktion mit kompaktem Träger in der Ebene aus der Gesamtheit der Linienintegrale längs aller Geraden, die den Träger schneiden, rekonstruiert werden kann. Sein besonderes Verdienst war es, den Zusammenhang dieses mathematischen Problems mit der Ermittlung eines Schichtbildes in der Medizin aus Messungen von Röntgenstrahlen aufzudecken. Diese Schichtbildtechnik ist heute unter dem Namen Computer - Tomographie bekannt und zu einem äußerst wertvollen diagnostischen Hilfsmittel geworden. Die Entwicklung der Computer - Tomographie hat zu Innovationen auf verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten geführt. Neben technischen und physikalischen Fragestellungen ist eine große Zahl tiefliegender mathematischer Probleme zu lösen, die durch die in der Industrie tätigen Praktiker oft vernachlässigt wurden. Ziel dieser Arbeit ist es, durch mathematische Untersuchungen klarzustellen, inwieweit eine Bildrekonstruktion in der Computer - Tomographie aus unvollständigen Daten möglich und sinnvoll ist, und dem Leser eine Vorstellung von der zu erwartenden Bildgüte zu verschaffen. Im I. Kapitel dieser Arbeit wird das zugrundeliegende mathematische Modell erläutert. Den Meßreihen entspricht hier die Radontransformation einer Dichtefunktion mit kompaktem Träger. Daher werden in diesem Einführungskapitel auch die für das Weitere wesentlichen Eigenschaften der Radontransformation zusammengestellt. Zwei Jahrzehnte Forschung an Hochschulen und in der Industrie haben Tomographen hervorgebracht, deren Bildqualität im allgemeinen nichts zu wünschen übrig läßt. Vor großen Schwierigkeiten steht man jedoch, wenn man nicht den kompletten Satz an Meßwerten zur Verfügung hat. In dieser Arbeit werden die drei klassischen Arten unvollständiger Daten betrachtet: hohle, beschnittene und angularbeschränkte Projektionen. Es wurden viele Versuche unternommen, auch in solchen Fällen ein Bild bzw. Teile des Bildes zu rekonstruieren. Die Resultate waren jedoch nicht befriedigend. Dennoch wurden kaum theoretische Untersuchungen über die Ursachen dafür durchgeführt. So sind Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zum Teil zu finden, genaue Betrachtungen über die Stetigkeit des Inversionsoperators wurden bisher überhaupt nicht angestellt. Diese Lücke wird im II. Kapitel geschlossen. Dabei werden auch die Auswirkungen der bewiesenen Eigenschaften auf die numerische Inversion diskutiert. Hohle Projektionen entstehen, wenn in der untersuchten Schicht Metallgegenstände liegen, die den Röntgenstrahl fast vollständig absorbieren und damit eine brauchbare Messung

unmöglich machen. Es stehen dann, in der Sprache des mathematischen Modells gesagt, lediglich jene Linienintegrale zur Verfügung, bei denen die Integrationsgeraden ein oder mehrere konvexe Gebiete, im klassischen Fall einen zentral gelegenen Kreis, nicht schneiden.

Zunächst ist klar, daß die hohlen Projektionen keine Aussage über die Dichtefunktion f innerhalb dieser Gebiete zulassen; andererseits weiß man aus Arbeiten von Helgason ([12],[13]), daß f für den klassischen Fall außerhalb des inneren Kreises durch hohle Projektionen eindeutig bestimmt ist.

Daher ist es nicht verwunderlich, daß eine Reihe von Autoren versucht haben, aus hohlen Projektionen Bilder zu rekonstruieren.

Bereits die Formeln von Cormack ([6],[7]) erlauben eine direkte Bildrekonstruktion aus hohlen Projektionen, jedoch ist dieses Vorgehen, wie z.B. Lewitt und Bates ([18], § 3) zeigten, aus Stabilitätsgründen überhaupt nicht brauchbar. Lewitt und Bates ([20],[21]) schlugen vor, die fehlenden Daten "konsistent" zu ergänzen und anschließend ein Bild mit einem Standardrekonstruktionsverfahren für vollständige Daten, wie z.B. dem Faltungsalgorithmus, zu erzeugen. Perry [36] probierte, die Dichtefunktion direkt durch Reihenentwicklung zu erhalten, Natterer [32] mit Hilfe "optimaler" Algorithmen durch Lösung eines Normminimierungsproblems. Soweit numerische Ergebnisse in diesen Arbeiten angegeben sind, kann man Verbesserungen gegenüber einem durch lineare Interpolation der Meßdaten erzeugten Bild feststellen, jedoch ist die Qualität, verglichen mit Bildern aus vollständigen Daten, sehr viel schlechter. In den Arbeiten ([2],[3]) habe ich die Idee einer konsistenten Ergänzung von Lewitt und Bates aufgegriffen und weiterentwickelt. Im Gegensatz zu allen bisherigen Arbeiten ist es gelungen, Bilder aus hohlen Projektionen auch im Falle nicht zentral liegender Metallgegenstände beliebiger Form zu rekonstruieren. Das Verfahren ist sehr schnell und zeigt in der in Veröffentlichungen üblichen Darstellungsform der Dichtefunktion als "Dichtegebirge" deutliche Verbesserungen gegenüber Primitivverfahren wie der linearen Interpolation. Eine Implementierung auf einem kommerziellen Computer - Tomographen, bei dem die Dichte durch Grautöne auf dem Monitor repräsentiert wird, wirkte jedoch ernüchternd. Experimente ergaben, daß großflächige Artefakte mit kontrastarmem glatten Rand weitgehend beseitigt werden können, während das Verfahren auf Streifenartefakte, die für den diagnostizierenden Arzt sehr irritierend sind, fast keine Wirkung zeigt. Obwohl es möglich ist, theoretisch die Konvergenz zu beweisen, konnten diese Fehler durch fortgesetzte Iteration nicht verringert werden. Im Gegenteil trat in der Praxis schon von einem recht niederen Iterationsgrad an aufgrund der technisch bedingten Meßfehler Divergenz ein.

Die Gründe dafür werden in dieser Arbeit völlig unabhängig von einem bestimmten Algorithmus aufgeklärt. Es liegt nach den obigen Schilderungen die Vermutung nahe, daß es sich bei der Bildrekonstruktion aus hohlen Projektionen um ein inkorrekt gestelltes Problem handelt, d. h. daß der Rekonstruktionsoperator unstetig ist. Dies wird auch in § 3 bewiesen, ist jedoch noch längst nicht hinreichend, um die Ausichtslosigkeit einer guten Bildrekonstruktion aus hohlen Projektionen einzusehen.

Es wird mit einer Charakterisierung der Projektionsdatensätze begonnen. Dabei stellt sich heraus, daß es Funktionen gibt, die selbst keine Projektionsdaten einer Dichtefunktion sind, aber beliebig genau durch echte Projektionsdaten approximiert werden können, und dies bezüglich einer jeden zweckmäßigen Norm. Dies zeigt, daß die Bildrekonstruktion aus hohlen Projektionen unabhängig von der Wahl der Normen unstetig ist. Selbst wenn man die Ansprüche an die Bildrekonstruktion soweit einschränkt, daß lediglich im Falle von Projektionsdatensätzen, die sich durch endliche Fourierentwicklungen eines Höchstgrades N darstellen lassen, exakte oder "nahezu exakte" Ergebnisse garantiert sind, so wird die Norm der Rekonstruktionsoperatoren nach unten durch eine mit N exponentiell wachsende Schranke abgeschätzt. Dies erklärt die praktischen Erfahrungen und läßt kaum Hoffnung für eine brauchbare Bildrekonstruktion aus hohlen Projektionen. Denn geringste Meßfehler können aufgrund der großen Operatornorm zu enormen Artefakten im Bild führen.

Ähnliche Aussagen werden auch für die beiden anderen klassischen Arten unvollständiger Daten bewiesen.

Beschnittene Projektionen entstehen, wenn man aus Gründen des Strahlenschutzes die äußeren Teile einer jeden Projektion ausblendet. Hier ist bekannt, daß im allgemeinen keine eindeutige Bildrekonstruktion möglich ist. In § 4 wird dies präzisiert und gezeigt, daß nirgends im Träger der Dichtefunktion die Rekonstruktion eindeutig ist. Dabei werden Ergebnisse aus einer früheren Arbeit [2], die nicht allgemein zugänglich ist, nochmals kurz skizziert.

Selbst wenn es durch zusätzliche Informationen gelingen würde, Eindeutigkeit herbeizuführen, wäre die Bildrekonstruktion wie im Falle hohler Projektionen unstetig. Obwohl diese Aussagen alle negativ sind, erscheint die hier gegebene Klarstellung in Anbetracht der vielen "Lösungsversuche" (z. B. Lewitt, Bates [20], [21], Natterer [32]) längst überfällig.

In § 5 werden die angularbeschränkten Projektionen untersucht. Versucht man, Bewegungsartefakte (z. B. Herzschlag) durch Reduktion der Aufnahmezeit zu verringern, indem man die Meßanordnung nicht über den ganzen Winkelbereich dreht, so hat man es mit angularbeschränkten Projektionen zu tun. Sie ermöglichen eine eindeutige Rekonstruk-

tion der Dichtefunktion. Das von Louis ([26],[27]) angegebene Verfahren bietet zwar eine Verbesserung im Vergleich mit Primitivmethoden, liefert aber dennoch deutlich gestörte Bilder. Dies liegt wiederum an der Unstetigkeit des Inversionsoperators, für den analoge Aussagen wie im Falle hohler Projektionen bewiesen werden.

§ 6 faßt die gewonnenen Ergebnisse über unvollständige Daten in der Computer - Tomographie zusammen und zieht Schlüsse für die Praxis. Dort wird auch folgende sehr wichtige Frage geklärt: wo ist die Bildrekonstruktion eindeutig möglich, wenn in einer Schicht mehrere Metallgegenstände liegen? Es wird bewiesen, daß z.B. im Falle zweier Hüftgelenksimplantate die Dichtefunktion f auch zwischen den Implantaten nirgends eindeutig rekonstruierbar ist, unabhängig davon, wie schmal und wie weit voneinander entfernt diese sind.

Die theoretische Betrachtung erfolgt nach einer Idee von Natterer [31] besonders effektiv und einheitlich im Rahmen der Theorie der Sobolewräume gebrochener Ordnung.

Die L^2 -Norm ist als Maß für die Bildgüte zu schwach. Normen, die die Ableitung enthalten, kommen nicht in Frage, da die Dichtefunktion in der Regel nur stückweise stetig und nicht differenzierbar ist. Die Sobolewnormen gebrochener Ordnung nehmen eine Zwischenstellung ein.

Darüberhinaus spricht für die Sobolewnormen eine Darstellung mit Hilfe der Fouriertransformation, die aufgrund des Projektionssatzes (Satz 2.4) unmittelbare Aussagen über das Verhältnis der Norm einer Dichtefunktion und ihrer Radon-transformierten (Satz 2.6) zuläßt.

Daher werden für alle wichtigen Abschätzungen in dieser Arbeit Sobolewnormen verwendet.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin ganz herzlich bedanken, der mich zu meinen Arbeiten auf dem Gebiet der Computer - Tomographie angeregt hat und mich stets wohlwollend unterstützt. Des weiteren gilt mein Dank meinen Kollegen am Lehrstuhl für numerische Mathematik für viele fruchtbare Diskussionen.

Kapitel I : Einführung

§ 1 Die Radontransformation in der Computer - Tomographie

Dieser Paragraph beschreibt das Prinzip der Bilderzeugung in der Computer - Tomographie, ihre mathematische Formulierung mit Hilfe der Radontransformation und stellt die wichtigsten Definitionen bereit.

Gewöhnliche Röntgenaufnahmen sind Projektionsbilder, d. h. bezüglich des Strahlenganges hintereinanderliegende Objekte werden auf dem Film aufeinanderprojiziert. Über ihre räumliche Anordnung kann anhand eines solchen Bildes keine Aussage getroffen werden. Unter Einsatz von Computern ist es möglich, auch die dreidimensionale Struktur aufzuklären. Da die heute verfügbaren Darstellungsmedien, der Film und der Bildschirm, zweidimensional sind, geschieht dies durch eine Folge von Schichtbildern. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf die zweidimensionale Computer - Tomographie.

Zur Ermittlung der Dichteverteilung f einer Schicht sendet man Röntgenstrahlen in verschiedensten Richtungen durch den Körper und mißt die Intensität I des Strahles jeweils vor und nach Durchdringen der Schicht. Der aus dieser Messung gewonnene Wert $\log(I_0/I)$ entspricht dem Linienintegral der Funktion f längs des Strahlenganges.

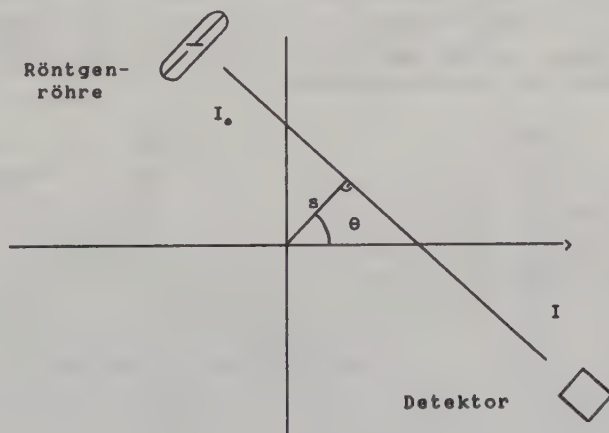


Abb. 1.1

Zur mathematischen Beschreibung der Meßgeometrie verwendet man die Radontransformation R . Sie wird hier nur für Funktionen im $\mathbb{R}^2$ definiert. Funktionen im $\mathbb{R}^n$ werden durch

die Radontransformation auf die Schar aller ihrer Hyperebenenintegrale abgebildet (siehe Helgason [13], Kap. I, § 2).

1.1 Definition

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar sei

$L_0^2(\Omega) := \{ f \in L_0^2(\mathbb{R}^n) : f \text{ hat kompakten Träger und } f=0 \text{ fast überall auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \}$.

1.2 Definition der Radontransformation R

Sei $f \in L_0^2(\mathbb{R}^2)$; dann ist die Radontransformierte Rf von f definiert durch

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : Rf(s, \theta) := \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) dt ,$$

wobei $\omega := \omega(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta))$ und
 $\omega^\perp := \omega^\perp(\theta) := (-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

Die Funktion f wird also durch die Radontransformation auf die Schar der Linienintegrale längs aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ abgebildet. Die Abhängigkeit der Lage der Integrationsgerade von den Parametern s und θ wird in Abb. 1.2 veranschaulicht. Der Bildrekonstruktion in der Computer-Tomographie entspricht damit im mathematischen Modell die Inversion der Radontransformation.

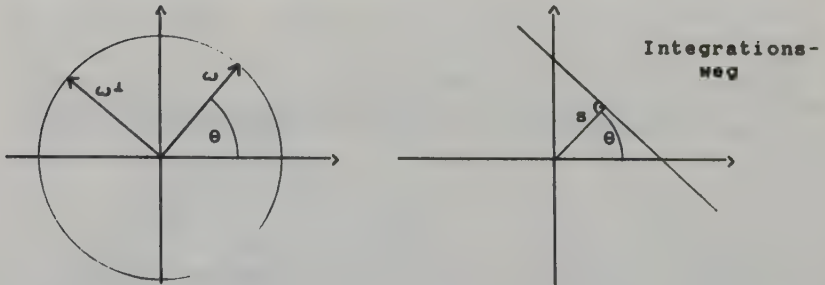


Abb. 1.2

Die Wohldefiniertheit der Radontransformation sichert das folgende

1.3 Lemma

Sei $f \in L^2_0(\mathbb{R}^2)$. Dann ist Rf wohldefiniert und die Einschränkung auf $\mathbb{R} \times [0, 2\pi[$ liegt in $L^2_0(\mathbb{R} \times [0, 2\pi[)$.

Beweis ([2], Kapitel I, §1) :

O.B.d.A. sei $f(x)=0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \geq 1$. Dann gilt für alle $s, \theta \in \mathbb{R}$ mit $|s| \geq 1$: $Rf(s, \theta) = 0$. Durch Anwendung der Cauchy - Schwarzschen Ungleichung sieht man :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |Rf(s, \theta)|^2 ds d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 f(s\omega + t\omega^\perp) dt \right|^2 ds d\theta \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(s\omega + t\omega^\perp)|^2 dt ds d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \|f\|_{L^2}^2 d\theta \\ &= 4\pi \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

1.4 Definition

Sei $f \in L^2_0(\mathbb{R}^2)$, $\theta \in \mathbb{R}$ fest. Dann heißt

$$P_\theta f := Rf(., \theta)$$

Projektion von f zum Winkel θ .

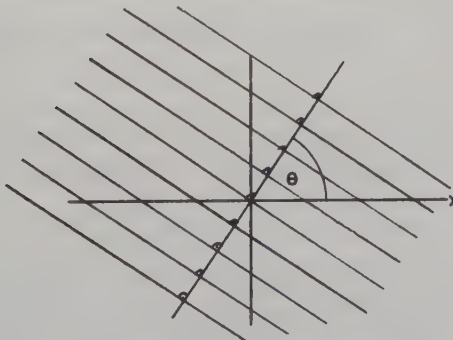


Abb. 1.3 Projektion zum Winkel θ

Aus der Definition der Radontransformation entnimmt man sofort folgendes

1.5 Lemma

Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Dann gilt

- a) $\forall s, \theta \in \mathbb{R} : Rf(s, \theta) = Rf(s, \theta + 2\pi)$ und
b) $\forall s, \theta \in \mathbb{R} : Rf(s, \theta) = Rf(-s, \theta + \pi)$.

Beweis :

Die durch (s, θ) , $(s, \theta + 2\pi)$ und $(-s, \theta + \pi)$ bestimmten Integrationsgeraden fallen aufeinander.

Obwohl die Funktion Rf nach Lemma 1.5 bereits durch ihre Werte auf $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ eindeutig bestimmt ist, wurde Rf auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Damit erreicht man im folgenden eine wesentliche Vereinfachung der Schreibweise durch Vermeidung einer großen Zahl von Fallunterscheidungen.

Nachdem in diesem Paragraphen gezeigt wurde, daß sich das Problem der Bildrekonstruktion aus Projektionen in der Computer - Tomographie auf die Inversion der Radontransformation zurückführen läßt, werden nun die wichtigsten Eigenschaften der Radontransformation zusammengestellt.

§ 2 Wichtige Eigenschaften der Radontransformation

Für mathematische Untersuchungen in der Computer - Tomographie haben sich die Sobolewräume gebrochener Ordnung vielfach bewährt und dienen in dieser Arbeit als theoretischer Rahmen. Sie werden in diesem Paragraphen eingeführt und anschließend zur Formulierung einiger wichtiger Eigenschaften der Radontransformation verwendet. Im II. Kapitel wird dann die Frage untersucht werden, inwieweit diese Eigenschaften bei Einschränkung des Definitionsbereiches der Radontransformierten erhalten bleiben.

Doch zunächst einige Definitionen und Schreibweisen :

2.1 Definition

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$; dann ist die Fouriertransformierte $F_n f$ von f definiert durch :

$$F_n f := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \cdot, y \rangle} f(y) dy .$$

Ist $m < n$, so bedeute $F_m f$ die Fouriertransformierte von f bezüglich der ersten m Variablen, während bei der Transformation die $n-m$ letzten Variablen von f als Parameter betrachtet werden.

2.2 Definition und Schreibweise

a) $L^2_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \forall \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt gilt } f \cdot \chi_\Omega \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$

b) $k(r) := \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r \}$.

2.3 Satz

Sei $f \in L^2_0(\mathbb{R}^2)$, $h \in L^2_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ mit $\omega := (\cos(\theta), \sin(\theta))$:

$$\int_{\mathbb{R}} Rf(s, \theta) h(s) ds = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) h(\langle x, \omega \rangle) dx .$$

Beweis (vgl. Smith, Solmon, Wagner [44], 3.1) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Rf(s, \theta) h(s) ds &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s\omega + t\omega^\perp) h(\langle s\omega + t\omega^\perp, \omega \rangle) dt ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) h(\langle x, \omega \rangle) dx \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $h_t(s) := e^{-ist}$ erhält man sofort folgenden wichtigen

2.4 Satz ("Projektionssatz")

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$\forall t, \theta \in \mathbb{R}$ mit $x = (t \cos(\theta), t \sin(\theta))$:

$$F_1 Rf(t, \theta) = (2\pi)^k F_2 f(x)$$

Diese Beziehung motiviert zur Einführung der folgenden Sobolewräume :

2.5 Definition und Lemma

Sei $\alpha \geq 0$, $R > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar; dann heißen

$$H^\alpha(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^\alpha |F_n f(x)|^2 dx < \infty \},$$

$$H_0^\alpha(\Omega) := H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L_0^2(\Omega) \quad \text{und}$$

$$\tilde{H}^\alpha := \{ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : g|_{\mathbb{R} \times [0, 2\pi]} \in L^2(\mathbb{R} \times [0, 2\pi]),$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : g(\cdot, \theta) = g(\cdot, \theta + 2\pi),$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)^\alpha |F_1 g(t, \theta)|^2 dt d\theta < \infty \},$$

$$\tilde{H}^\alpha(R) := \{ g \in \tilde{H}^\alpha : \forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \geq R : g(s, \theta) = 0 \}$$

Sobolewräume der Ordnung α .

Sie sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha : H^\alpha(\mathbb{R}^n) \times H^\alpha(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(f, g) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^\alpha F_n f(x) \overline{F_n g(x)} dx$$

bzw.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle'_\alpha : \tilde{H}^\alpha \times \tilde{H}^\alpha \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(f, g) \longmapsto \int_0^{2\pi} \langle f(\cdot, \theta), g(\cdot, \theta) \rangle'_\alpha d\theta.$$

Schließlich seien die Sobolewnormen definiert durch

$$\forall f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) : \|f\|_\alpha := \langle f, f \rangle_\alpha^{\frac{1}{2}} \quad \text{und}$$

$$\forall g \in \tilde{H}^\alpha : \|g\|'_\alpha := \langle g, g \rangle'_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

(vgl. Weidmann [49], § 10.2, S. 297).

Mit Hilfe des Projektionssatzes beweist man nun leicht die Stetigkeit der Radontransformation und ihrer Inversen (Natterer [34], 2.6) :

2.6 Satz

Für jedes $\alpha \geq 0$ existieren Konstanten $c(\alpha)$ und $C(\alpha)$, sodaß für alle $f \in H_0^\alpha(k(1))$ gilt :

$$c(\alpha) \|f\|_\alpha \leq \|Rf\|'_{\alpha+\frac{1}{2}} \leq C(\alpha) \|f\|_\alpha.$$

Insbesondere folgt aus Satz 2.6 die Eindeutigkeit der Inversion der Radontransformation. Eine explizite Inversionsformel für die Radontransformation hat bereits Radon [39] 1917 angegeben.

2.7 Satz

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $g = Rf$. Dann gilt für alle $s, \theta \in \mathbb{R}$:

$$f(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) = - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} g'(s \cos(\xi - \theta) + q, \xi) d\xi dq.$$

Beweis : Radon [39], Satz I - III oder Helgason [13], Kap. I, Satz 3.4.

Nachdem wir nun wissen, daß die Radontransformation bei geeigneter Wahl der Sobolewnormen stetig ist und eine stetige Inverse besitzt, stellt sich die Frage, welche Funktionen im Bildraum von R liegen. Wenn man in Lemma 2.3

für h ein Polynom einsetzt, so ist das Ergebnis der Integration ein trigonometrisches Polynom, das höchstens den Grad von h besitzt. Diese Beobachtung wurde von Ludwig [29] zu einer erstaunlichen Charakterisierung des Bildraumes der Radontransformation genutzt :

2.8 Satz von Ludwig

Sei $\alpha \geq 0$, $r > 0$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; dann gilt :

$$\exists f \in H_0^\alpha(k(r)) : Rf = g \quad \Longleftrightarrow$$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } g \in \tilde{H}^{\alpha+k}, \\ \text{b) } g(t, \theta) = 0 \text{ für fast alle } (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } |t| > r, \\ \text{c) } g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi) \text{ für fast alle } (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ und} \\ \text{d) } \forall m \in \mathbb{N}_0 : \int_{\mathbb{R}} g(t, \cdot) t^m dt \text{ ist abgesehen von einer} \\ \text{Nullmenge ein trigonometrisches Polynom höchstens} \\ \text{m-ten Grades.} \end{array} \right.$$

Beweis : Smith, Solmon, Wagner [44], Satz 13.4 .

Die Bedingungen c) und d) werden als Konsistenzbedingung bezeichnet. Damit sind die wichtigsten Definitionen und bekannten Sätze bereitgestellt, die in dieser Arbeit benötigt werden.

Kapitel II : Unvollständige Daten in der Computer - Tomographie

In der Computer - Tomographie treten häufig Situationen auf, in denen bestimmte Projektionen oder Teile der Projektionen nicht verfügbar sind. Es wurden viele Versuche unternommen, auch in einem solchen Fall die Dichtefunktion f ganz oder zumindest auf Teilgebieten zu rekonstruieren. Obwohl die Ergebnisse nicht befriedigend waren, wurden kaum Überlegungen über den Grund dafür angestellt. In diesem Kapitel werden die drei klassischen Arten unvollständiger Daten der Reihe nach auf Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Bildrekonstruktion und eine Reihe weiterer Eigenschaften untersucht. In § 6 werden die Ergebnisse einander gegenübergestellt und Schlußfolgerungen für die Praxis gezogen.

§ 3 Hohle Projektionen

Liegen in der gesuchten Schicht Metallgegenstände wie z.B. ein Herzschrittmacher, eine Zahnkrone oder eine Endoprothese, die den Röntgenstrahl fast vollständig absorbieren und damit eine sinnvolle Messung unmöglich machen, so fehlen die inneren Anteile einer jeden Projektion. Man spricht daher von hohlen Projektionen.

3.1 Definition

Sei $r \in]0,1[$, $\alpha \geq 0$,

$$\tilde{H}_{h,r}^{\alpha} := \{ g : (\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists h \in \tilde{H}^{\alpha} : h = g \text{ auf } (\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R} \}.$$

Dann heißt

$$R_{h,r} : H_0^{\alpha}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \tilde{H}_{h,r}^{\alpha+\frac{1}{2}} \\ f \longmapsto Rf|_{(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}}$$

hohle Radontransformation.

3.2 Definition

Sei $r \in]0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ und $f \in L_0^2(\mathbb{R}^2)$. Dann heißt

$$P_{\theta,h,r} f := P_{\theta} f|_{\mathbb{R} \setminus]-r, r[}$$

hohle Projektion zum Winkel θ .

Die Gesamtheit aller hohlen Projektionen liefert genau die Werte

$$Rf(s, \theta) \quad \text{mit} \quad |s| \geq r.$$

Daher ist das Inversionsproblem identisch mit der Inversion der hohlen Radontransformation.

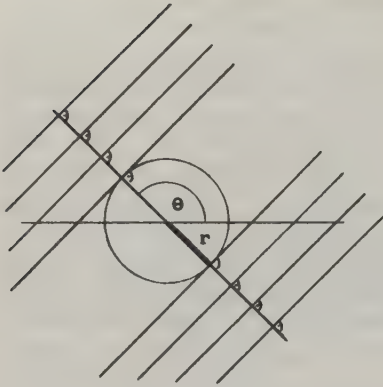


Abb. 3.1 Hohle Projektion

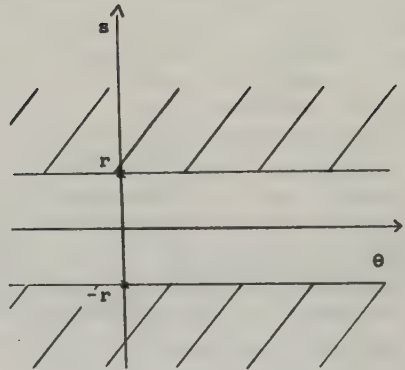


Abb. 3.2 Definitionsbereich der hohlen Radontransformation

Über f kann aufgrund der hohlen Projektionen in $k(r)$ keinerlei Aussage getroffen werden, auf $\mathbb{R}^2 \setminus k(r)$ ist f bekanntlich eindeutig bestimmt :

3.3 Satz

Sei $f_1, f_2 \in L_1^1(\mathbb{R}^2)$, $r > 0$ und $R_{h,r} f_1 = R_{h,r} f_2$.

Dann gilt : $f_1 = f_2$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus k(r)$.

Beweis : Ergibt sich sofort aus Satz 2.8 durch Einsetzen von $g := R(f_1 - f_2)$.

Nachdem die Eindeutigkeit der Rekonstruktion gesichert ist, stellt sich die Frage nach der Existenz einer Lösung des Inversionsproblems. Kann man, wie in Satz 2.8 für vollständige Daten geschehen, auch hier notwendige und hinreichende Bedingungen angeben ?

Zunächst als Vorbereitung folgendes

3.4 Lemma

Sei $g \in L_1^1(\mathbb{R})$, $a < b$, $M \in \mathbb{N}$. Dann $\exists h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$\forall t \in \mathbb{R}, t \notin [a, b] : h(t) = 0$ und

$$\forall m \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} t^m (g(t) + h(t)) dt = 0.$$

Beweis : Durch Orthonormalisierung erhält man ein System von Polynomen $(p_0, p_1, \dots, p_M)$ höchstens M -ten Grades mit der Eigenschaft

$$\forall i, j \in \{0, \dots, M\} : \int_a^b p_i(t) p_j(t) dt = \delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Sei nun $S := \sup \{ |p_1(t)| : t \in [a, b], i \in \{0, \dots, M\} \}$ und $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften :

a) $\forall t \notin [a, b] : \xi(t) = 0$,

b) $\int_a^b |\xi(t) - 1| dt < \frac{1}{S^2 (M+1)}$.

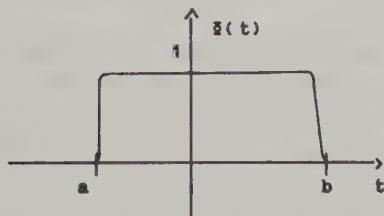


Abb. 3.3 Hilfsfunktion ξ

Solch eine Funktion ξ existiert und kann zum Beispiel durch Regularisierung einer Treppenfunktion erzeugt werden. Dann gilt mit $\tilde{p}_i := p_i \cdot \xi$ für alle $i \in \{0, \dots, M\}$:

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} p_i(t) \tilde{p}_j(t) dt &= \\ \int_a^b p_i(t) p_j(t) \xi(t) dt &= \\ \int_a^b p_i(t) p_j(t) (\xi(t) - 1) dt + \delta_{i,j} . \end{aligned}$$

Wegen $\left| \int_a^b p_i(t) p_j(t) (E(t)-1) dt \right| < S^2 \frac{1}{S^2 (M+1)} = \frac{1}{M+1}$

erhält man für alle $i, j \in \{0, \dots, M\}$:

$$\int_{\mathbb{R}} p_i(t) \tilde{p}_i(t) dt > 1 - \frac{1}{M+1} \quad \text{und}$$

$$\int_{\mathbb{R}} p_i(t) \tilde{p}_j(t) dt < \frac{1}{M+1} \quad \text{für } i \neq j.$$

Das Gleichungssystem

$$\left(\int_{\mathbb{R}} p_i(t) \tilde{p}_j(t) dt \right)_{i,j} \vec{x} = \left(\int_{\mathbb{R}} p_i(t) g(t) dt \right)_i$$

ist also diagonaldominant und besitzt eine eindeutige Lösung $\vec{x}$. Sei nun

$$h := - \sum_{j=0}^M x_j \tilde{p}_j.$$

Dann gilt $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\forall t \in [a, b] : h(t) = 0 \quad \text{und}$$

$$\forall i \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} p_i(t) (g(t) + h(t)) dt = 0.$$

Da $(p_0, p_1, \dots, p_M)$ $M+1$ linear unabhängige Polynome höchstens M -ten Grades sind, lassen sich insbesondere die Monome $t \mapsto t^m$ für $m \in \{0, \dots, M\}$ als Linearkombination von $(p_0, \dots, p_M)$ darstellen.

Also gilt die Aussage des Lemmas :

$$\forall m \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} t^m (g(t) + h(t)) dt = 0.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man einen Existenzsatz für den Fall einer endlichen trigonometrischen Entwicklung beweisen:

3.5 Satz

Sei $\alpha \geq 0$, $R > r > 0$, $M \in \mathbb{N}$. Ist

- a) $g \in \tilde{H}_{h,r}^{\alpha+k}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R : g(t, \theta) = 0$,
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq r : g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi)$ und
- d) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq r :$

$$g(t, \theta) = \sum_{k=1}^M g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^M g_{c,k}(t) \cos(k\theta)$$

mit geeigneten Funktionen

$g_{s,k} \in L_2^1(\mathbb{R})$ für $k \in \{1, \dots, M\}$ und

$g_{c,k} \in L_2^1(\mathbb{R})$ für $k \in \{0, \dots, M\}$,

so $\exists f \in H_0^\alpha(k(R)) : R_{h,r}f = g$.

Beweis :

Nach Definition von $\tilde{H}_{h,r}^{\alpha+k}$ gibt es ein $\tilde{g} \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ mit $g = \tilde{g}$ auf $(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}$. Dieses $\tilde{g}$ läßt sich trigonometrisch entwickeln :

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : \tilde{g}(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_{c,k}(t) \cos(k\theta).$$

Sei nun $\hat{g}$ definiert durch

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : \hat{g}(t, \theta) := \sum_{k=1}^M \tilde{g}_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^M \tilde{g}_{c,k}(t) \cos(k\theta).$$

Dann gilt $\hat{g} \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ und nach Voraussetzung d) gilt :

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq r : \hat{g}(t, \theta) = g(t, \theta).$$

Nach Lemma 3.4 existieren Funktionen

$h_{s,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für $k \in \{1, \dots, M\}$ und

$h_{c,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für $k \in \{0, \dots, M\}$

mit den folgenden Eigenschaften :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq r : h_{s,k}(t) = 0, h_{c,k}(t) = 0 \quad \text{und}$$

$$\forall m \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} t^m (\tilde{g}_{s,k}(t) + h_{s,k}(t)) dt = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_{\mathbb{R}} t^m (\tilde{g}_{c,k}(t) + h_{c,k}(t)) dt = 0 .$$

Sei nun für alle $t, \theta \in \mathbb{R}$ $\hat{g}$ durch

$$\begin{aligned} \hat{g}(t, \theta) := & \sum_{k=1}^M (\tilde{g}_{s,k}(t) + h_{s,k}(t)) \sin(k\theta) + \\ & \sum_{k=0}^M (\tilde{g}_{c,k}(t) + h_{c,k}(t)) \cos(k\theta) \end{aligned}$$

und schließlich g^* durch $g^*(t, \theta) := \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi))$ definiert. Dann erfüllt g^* die Bedingungen von Satz 2.8 :

a) $g \in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} ((t, \theta) \mapsto h_{s,k}(t) \sin(k\theta)) &\in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad \text{für } k \in \{1, \dots, M\}, \\ ((t, \theta) \mapsto h_{c,k}(t) \cos(k\theta)) &\in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad \text{für } k \in \{0, \dots, M\}. \end{aligned}$$

Also gilt auch $\hat{g} \in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}}$ und $g^* \in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}}$.

b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R :$

$$\begin{aligned} g^*(t, \theta) &= \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi)) \\ &= \frac{1}{2} (g(t, \theta) + g(-t, \theta + \pi)) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} g^*(t, \theta) &= \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi)) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta + 2\pi) + \hat{g}(-t, \theta + \pi)) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{g}(-t, \theta + \pi) + \hat{g}(t, (\theta + \pi) + \pi)) \\ &= g^*(-t, \theta + \pi) . \end{aligned}$$

d) $\forall m \in \{0, \dots, M\} :$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^m g^*(t, \theta) dt &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} t^m (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} t^m \hat{g}(t, \theta) dt + (-1)^m \int_{\mathbb{R}} t^m \hat{g}(t, \theta + \pi) dt \right) = 0 \end{aligned}$$

nach Konstruktion der Funktionen $h_{s,k}$ und $h_{c,k}$.

Also ist für alle $m \in \{0, \dots, M\}$ obiges Integral konstant 0 und damit ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades, für $m > M$ ist diese Bedingung aufgrund des endlichen Reihenansatzes automatisch erfüllt.

Nach Satz 2.8 existiert ein $f \in H_0^\infty(k(R))$: $Rf = g^*$.

Da für alle $t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq r$

$$\begin{aligned} g^*(t, \theta) &= \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi)) = \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi)) \\ &= \frac{1}{2} (g(t, \theta) + g(-t, \theta + \pi)) = g(t, \theta) \end{aligned}$$

gilt, folgt die Behauptung des Satzes $R_{h,r}f = g$.

Nach Satz 2.8 sind die Forderungen a) - c) in Satz 3.5 notwendig. Freilich läßt sich nicht jede Funktion $g = R_{h,r}f$ in eine endliche Fourierreihe entwickeln, wie in d) gefordert wird.

Andererseits genügen a) - c) nicht, um die Existenz einer Funktion f mit $R_{h,r}f = g$ zu sichern :

3.6 Satz

Sei $R > r > 0$. Dann gibt es ein g mit

a) $\forall \epsilon \geq 0 : g \in \tilde{H}^{\epsilon+\frac{1}{2}},$

b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R : g(t, \theta) = 0,$

c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi)$

und $\forall \epsilon \geq 0 \quad \forall f \in H_0^\infty(\mathbb{R}^2) : R_{h,r}f \neq g|_{(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}}.$

Beweisidee :

Zu vorgegebenen $R > r > 0$ wird ein g mit obigen Eigenschaften a) - c) konstruiert. Die Annahme, daß es ein $\epsilon \geq 0$ und ein $f \in H_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $R_{h,r}f = g|_{(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}}$ gibt, wird durch zweimalige Anwendung des Eindeutigkeitssatzes 3.3 zum Widerspruch geführt.

Beweis :

1. Schritt : geometrische Vorbereitungen

Sei $K_1 := k((0,0), r)$ (Kreis um $(0,0)$ mit Radius r),
 $K_2 := k((0,0), \frac{1}{2}(r+R))$,
 $K_3 := k((r+\frac{1}{2}(r+R), 0), r)$,
 $K(\tau) := k((r+\frac{1}{2}(r+R), 0), r+\tau)$,
 $M_1 := \text{co}(K_1 \cup K_3)$ (co : konvexe Hülle),
 $M_2 := \text{co}(K_2 \cup K_3)$ und
 $M(\tau) := \text{co}(K_1 \cup K(\tau))$.

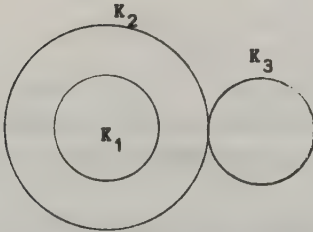


Abb. 3.4 K_1 , K_2 und K_3

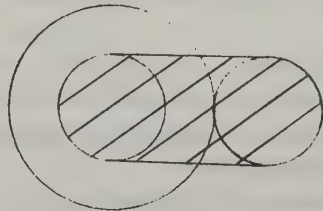


Abb. 3.5 M_1

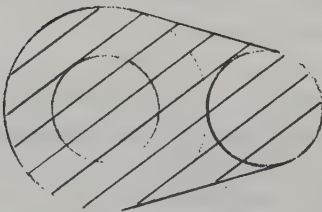


Abb. 3.6 M_2

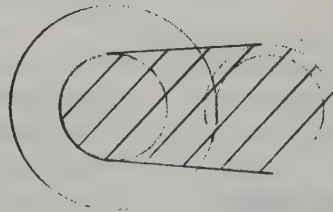


Abb. 3.7 $M(\tau)$

Nun gilt $M_2 \setminus \overline{(M_1 \cup K_2)} \cap k((0,0), R) \neq \emptyset$.

Da für alle $\tau_2 > \tau_1 > 0$: $M(\tau_1) \subset M(\tau_2)$

und $M_1 = \bigcap_{\tau > 0} M(\tau)$ gilt, existiert ein $\tau > 0$ mit

$T := M_2 \setminus \overline{(M(\tau) \cup K_2)} \cap k((0,0), R) \neq \emptyset$.

Da T offen ist, existieren $y \in k((0,0), R)$ und $\delta > 0$ mit $k(y, \delta) \subset T$. Derartige τ , y und δ seien für den Rest des Beweises fest gewählt.

Für die Konstruktion von g wird eine beliebig oft differenzierbare Funktion d benötigt, deren Betrag den Abstand des Punktes $(r+k(r+R), 0)$ von der Geraden

$$(s(\cos(\theta), \sin(\theta)) + t(-\sin(\theta), \cos(\theta)) : t \in \mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von den Parametern s und θ angibt.

Man erhält $d(s, \theta) = (r+k(r+R)) \cdot \cos(\theta) - s$. Diese Funktion d hat offenbar die gewünschten Eigenschaften und ist periodisch in θ mit Periode 2π .

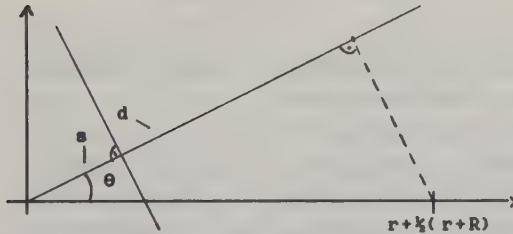


Abb. 3.8 Konstruktion von d

2. Schritt : Konstruktion von g

Es existiert ein $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

- a) $\forall x \in k(y, \delta) : \tilde{f}(x) > 0$,
 - b) $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus k(y, \delta) : \tilde{f}(x) = 0$,
- und ein $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

- a) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \leq r : h(t) = 0$,
- b) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq r+\tau : h(t) = 1$.

Nun sei $\tilde{g} := R\tilde{f}$ und g definiert durch

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : g(s, \theta) := \tilde{g}(s, \theta) \cdot h(d(s, \theta)).$$

Dann gilt $\forall \kappa \geq 0 : \tilde{f} \in H_0^\kappa(\mathbb{R}^2), \tilde{g} \in \tilde{H}^{\kappa+\frac{1}{2}}$,

$h \cdot d \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und d ist periodisch in der zweiten Variablen mit Periodenlänge $2\pi \implies g \in \tilde{H}^{\kappa+\frac{1}{2}}$.

Die Funktion g erfüllt auch die restlichen Voraussetzungen in Satz 3.6 :

$$\begin{aligned}\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \geq R : g(s, \theta) &= \tilde{g}(s, \theta) \cdot h(d(s, \theta)) = 0, \\ &\text{denn } \tilde{g}(s, \theta) = 0, \\ \forall s, \theta \in \mathbb{R} : g(-s, \theta + \pi) &= \tilde{g}(-s, \theta + \pi) h(d(-s, \theta + \pi)) \\ &= \tilde{g}(s, \theta) h(d(s, \theta)) \\ &= g(s, \theta),\end{aligned}$$

denn die durch (s, θ) und $(-s, \theta + \pi)$ repräsentierten Geraden fallen aufeinander.

3. Schritt : Widerspruch zur Annahme

$$\exists \alpha \geq 0 \quad \exists f \in H_0^\infty(\mathbb{R}^2) : R_{h, r} f = g.$$

Sei also $\alpha \geq 0$, $f \in H_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g = Rf$ auf $(\mathbb{R} \setminus [-r, r]) \times \mathbb{R}$ und $\hat{g} := Rf$. Zweimalige Anwendung des Eindeutigkeitsatzes 3.3 führt nun zum Widerspruch.

- a) Sei $|s| \geq \kappa(r+R)$. Dann kann $\tilde{g}(s, \theta)$ nur dann von 0 verschieden sein, wenn die zu (s, θ) gehörige Integrationsgerade $k(y, \delta)$ schneidet. Da K_2 und K_3 sich berühren und $k(y, \delta) \subset \text{co}(K_2 \cup K_3)$, schneidet die Gerade dann K_2 oder K_3 . Da ersteres wegen $|s| \geq \kappa(r+R)$ nicht möglich ist, muß $|d(s, \theta)| \leq r$, also $h(d(s, \theta)) = 0$ gelten.

Daraus folgt $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \geq \kappa(r+R) : g(s, \theta) = 0$ und mit Satz 3.3 : $f = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus k((0, 0), \kappa(r+R))$, insbesondere wegen $k(y, \delta) \cap k((0, 0), \kappa(r+R)) = \emptyset$:
 $f = 0$ auf $k(y, \delta)$.

- b) Da $k(y, \delta) \cap M(\tau) = \emptyset$, und $k(y, \delta)$ und $M(\tau)$ konvex sind, existiert ein Kreis $k(z, \sigma)$ mit der Eigenschaft $M(\tau) \subset k(z, \sigma)$ und $k(y, \delta) \cap k(z, \sigma) = \emptyset$. Es gilt $|d(s, \theta)| \geq r + \tau$ für alle Geraden $\{s(\cos(\theta), \sin(\theta)) + t(-\sin(\theta), \cos(\theta)) : t \in \mathbb{R}\}$, die nicht $k(z, \sigma)$ und damit auch nicht $M(\tau)$ schneiden.

Damit folgt für die dazugehörigen (s, θ) :

$h(d(s, \theta)) = 1$, $g(s, \theta) = \tilde{g}(s, \theta)$ und Anwendung von Satz 3.3 nach Translation des Koordinatensystems um y (d.h. der neue Ursprung liegt in y) ergibt :

$$f = \tilde{f} \text{ auf } k(y, \delta).$$

Nach Konstruktion von $\tilde{f}$ widersprechen sich die Ergebnisse von a) und b), die Annahme zu Beginn des 3. Schrittes war also falsch und der Satz ist damit bewiesen.

Nach Satz 3.5 gibt es zu jedem endlichen Abschnitt g_n der Fourierentwicklung einer Funktion $g \in \tilde{H}_{h,r}^{\alpha+k}$, die a) - c) in Satz 3.5 erfüllt, ein $f_n \in H_0^\alpha(k(R))$ mit $R_{h,r} f_n = g_n$. Kann man die (f_n) so wählen, daß $f := \lim f_n$ in $H_0^\alpha(k(R))$ existiert, so gilt nach Satz 2.6 $R_{h,r} f = g$. Falls umgekehrt ein $f \in H_0^\alpha(k(R))$ existiert mit $R_{h,r} f = g$, so können die (f_n) so gewählt werden, daß $R_{h,r} f_n = g_n$ und $f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ in $H_0^\alpha(k(R))$.

Satz 3.6 zeigt, daß a) - c) in Satz 3.5 nicht hinreichend ist, um die Existenz einer Funktion $f \in H_0^\alpha(k(R))$ zu garantieren, d) in Satz 3.5 ist nicht notwendig. Nimmt man zu a) - c) in Satz 3.5 noch die Existenz einer konvergenten Folge $(f_n) \subset H_0^\alpha(k(R))$ mit $R_{h,r} f_n = g_n$ hinzu, so hat man zwar notwendige und hinreichende Bedingungen, das Konvergenzkriterium ist jedoch numerisch nicht verwendbar. Man ist also an Konsistenzbedingungen, wie sie in Satz 2.8 d) für vollständige Daten angegeben wurden, interessiert. Bedingung d) in Satz 2.8 kann man äquivalent umformulieren zu

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, |n| \leq m :$$

$$\mu_{n,m}(g) := \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \theta) e^{in\theta} dt d\theta = 0.$$

Die $(\mu_{n,m})$ sind stetige Funktionale auf $\tilde{H}^{\alpha+k}(R)$ für alle $\alpha \geq 0$, denn

$$\begin{aligned} |\mu_{n,m}(g)| &= \left| \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \theta) e^{in\theta} dt d\theta \right| \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} |e^{in\theta}|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2m} g^2(t, \theta) dt d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|g\|_0 \leq C \|g\|_{\alpha+k}. \end{aligned}$$

Gesucht ist also eine stetige Abbildung $\mu : \tilde{H}^{\alpha+k}(R) \rightarrow \mathbb{R}$, die nur von den hohlen Projektionen abhängig ist, auf $R(H_0^\infty(k(R)))$ identisch 0 ist und somit den Schluß $\mu(g) \neq 0 \Rightarrow \forall f \in H_0^\infty(k(R)) : R_{h,r} f \neq g | (R \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}$ zuläßt.

Derartige stetige Konsistenzbedingungen, die über die Bedingungen a) - c) in Satz 3.5 hinausgehen, gibt es für hohle Projektionen leider nicht :

3.7 Satz

Sei $\alpha \geq 0$, $R > r > 0$,

$\mu : \tilde{H}^{\alpha+k}(R) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

(1) $\forall g_1, g_2 \in \tilde{H}^{\alpha+k}(R), g_1 = g_2$ auf $(R \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R} :$

$$\mu(g_1) = \mu(g_2),$$

(2) $\forall f \in H_0^\infty(k(R)) : \mu(Rf) = 0.$

Dann gilt für alle g mit

a) $g \in \tilde{H}^{\alpha+k}(R)$,

b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi) :$

$$\mu(g) = 0.$$

Beweis :

Sei g eine Funktion mit den Eigenschaften a) und b). Dann läßt sich g entwickeln in der Form

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{c,k}(t) \cos(k\theta)$$

und g_n sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) := \sum_{k=1}^n g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^n g_{c,k}(t) \cos(k\theta).$$

Dann gilt nach Satz 3.5 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists f_n \in H_0^\infty(k(R)) : R_{h,r} f_n = g_n|_{(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}}.$$

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $g_n^* := R f_n$.

Nach Voraussetzung (2) gilt $\mu(g_n^*) = 0$, also nach (1) auch $\mu(g_n^*) = \mu(g_n) = 0$. Da $g_n \rightarrow g$ in $\tilde{H}^{\alpha+k}$ und μ stetig ist, folgt : $\mu(g_n) \rightarrow \mu(g)$, also

$$\mu(g) = 0.$$

Nachdem keine Aussicht besteht, wie im Falle vollständiger Daten durch stetige Konsistenzbedingungen zu klären, ob es ein Urbild bezüglich der hohlen Radontransformation gibt, wird nun der Frage nachgegangen, ob die Inverse der hohlen Radontransformation stetig ist. Als Grundlage dient der folgende

3.8 Satz

Sei $0 < r < r' < R$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Funktionen $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

- a) $\forall \alpha \geq 0 : g_n \in \tilde{H}^{\alpha+k}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R : g_n(t, \theta) = 0$,
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = g_n(-t, \theta + \pi)$ und
- d) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = \xi_n(t) \sin(n\theta)$
mit geeigneter Funktion $\xi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

und es gilt :

$\forall \alpha, \beta \geq 0 \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \forall f \in H_0^\infty(k(R))$ mit der Eigenschaft $R_{h,r} f = g_n|_{(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}} :$

$$\|f\|_\alpha > C \cdot \left(\frac{R'}{r}\right)^n \|g_n\|_\beta$$

Beweis :

Es gibt eine Funktion $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit

- a) $\forall t \in \mathbb{R} : \xi(t) = \xi(-t)$,
- b) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq R : \xi(t) = 0$,
- c) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \leq \frac{1}{2}R : \xi(t) = 0$ und
- d) $\forall t \in]\frac{1}{2}R, R[: \xi(t) > 0$.

Weiter sei für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_0^+ : \xi_n(t) &:= \xi(t), \\ \forall t \in \mathbb{R}^- : \xi_n(t) &:= (-1)^n \xi(t) \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) := \xi_n(t) \sin(n\theta).$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: $\xi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ wegen Voraussetzung b) und c) über ξ , $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und g_n erfüllt

die Bedingungen a) - d) des Satzes:

- a) $\forall \alpha \geq 0 : g_n \in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R : g_n(t, \theta) = 0 \cdot \sin(n\theta) = 0$,
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = \xi_n(t) \cdot \sin(n\theta) = g_n(-t, \theta + \pi)$,
da bei Übergang von (t, θ) zu $(-t, \theta + \pi)$ je nach Parität von n entweder $\xi_n(t)$ und $\sin(n\theta)$ beide das Vorzeichen wechseln oder beibehalten,
- d) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = \xi_n(t) \cdot \sin(n\theta)$
nach Konstruktion von g_n .

Sei nun $n \geq 2$, $\alpha, \beta \geq 0$ fest gewählt, $f \in H_0^\alpha(k(R))$ mit

$$R_h, r^f = g_n|_{(\mathbb{R} \setminus]-r, r[) \times \mathbb{R}} \quad \text{und} \quad g_n^* := Rf.$$

Dann gilt nach Satz 2.8 insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{n-2} g_n^*(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus]-r, r[} t^{n-2} g_n(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_{-r}^r t^{n-2} g_n^*(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta. \end{aligned}$$

Abschätzung der beiden Terme liefert nun die Behauptung :

α) Als Hilfskonstante sei $R'' \in]R', R[$ fest gewählt. Da $m(R'') := \min \{ \xi(t) : t \in [r, R''] \} > 0$ nach Voraussetzung d) über ξ , gilt :

$$\int_0^{2\pi} \int_{R \setminus]-r, r[} t^{n-2} g_n(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{R \setminus]-r, r[} t^{n-2} \xi_n(t) \sin^2(n\theta) dt d\theta =$$

$$\pi \int_{R \setminus]-r, r[} t^{n-2} \xi_n(t) dt \geq 2\pi \int_r^{R''} t^{n-2} \xi(t) dt \geq$$

$$2\pi \int_r^{R''} t^{n-2} m(R'') dt = 2\pi m(R'') \left(\frac{R''^{n-1}}{n-1} - \frac{r^{n-1}}{n-1} \right) \geq$$

$$2\pi m(R'') \frac{1}{n-1} (R'' - r) R''^{n-2}.$$

$$\beta) \left| \int_0^{2\pi} \int_{-r}^r t^{n-2} g_n^*(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta \right| \leq$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \int_{-r}^r t^{2n-4} g_n^{*2}(t, \theta) dt d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\pi^{\frac{1}{2}} r^{n-2} \left(\int_0^{2\pi} \int_R g_n^{*2}(t, \theta) dt d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \pi^{\frac{1}{2}} r^{n-2} \|g_n^*\|_{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Setzt man α) und β) in obige Konsistenzgleichung ein, so erhält man

$$\pi^{\frac{1}{2}} r^{n-2} \|g_n^*\|_{\alpha+\frac{1}{2}} \geq 2\pi m(R'') \frac{1}{n-1} (R'' - r) R''^{n-2}.$$

Zusammen mit Satz 2.6 folgt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\alpha} &\geq C' \quad \|g_n^{\alpha}\|_{\alpha+k} \geq C' \quad 2\pi^{\frac{k}{2}} m(R'') \frac{1}{n-1} (R''-r) \left(\frac{r}{R''}\right)^2 \left(\frac{R''}{r}\right)^n \\ &= C' \quad 2\pi^{\frac{k}{2}} m(R'') (R''-r) \left(\frac{r}{R''}\right)^2 \frac{1}{n-1} \left(\frac{R''}{r}\right)^n \left(\frac{R'}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

$(\|g_n\|_{\beta}')$ ist nach Konstruktion von (g_n) beschränkt. Berücksichtigt man ferner, daß $\frac{1}{n-1} \left(\frac{R''}{r}\right)^n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, so folgt aus obiger Ungleichung die Behauptung des Satzes.

Zur Formulierung eines Satzes über den Inversionsoperator der hohlen Radontransformation benötigen wir noch einige Definitionen:

3.9 Definition

Für $\alpha \geq 0$, $r > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ meßbar sei

a) $H_{0,h,r}^{\alpha}(\Omega) := \{ f : \mathbb{R}^2 \setminus k(r) \rightarrow \mathbb{R} : \exists h \in H_0^{\alpha}(\Omega) \text{ mit } f = h \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus k(r) \}$,

b) $\|\cdot\|_{\alpha}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \forall f \in H_{0,h,r}^{\alpha}(\Omega) : \\ \|f\|_{\alpha} := \inf \{ \|h\|_{\alpha} : h \in H_0^{\alpha}(\Omega), f = h \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus k(r) \}, \end{aligned}$$

c) $\|\cdot\|_{\alpha}'$ definiert durch

$$\begin{aligned} \forall g \in \tilde{H}_{h,r}^{\alpha} : \\ \|g\|_{\alpha}' := \inf \{ \|h\|_{\alpha}' : h \in \tilde{H}^{\alpha}, g = h \text{ auf } (\mathbb{R} \setminus [-r, r]) \times \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

3.10 Bemerkung

Für $\alpha \geq 0$, $r > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ meßbar sind

$(H_{0,h,r}^{\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{\alpha})$ und $(\tilde{H}_{h,r}^{\alpha}, \|\cdot\|_{\alpha}')$ Banachräume.

Mit obigen Bezeichnungen kann man $R_{h,r}$ als Operator auf $H_{0,h,r}^{\alpha}(\Omega)$ betrachten, denn es gilt $R_{h,r}f_1 = R_{h,r}f_2$ für alle Funktionen $f_1, f_2 \in H_0^{\alpha}(\Omega)$ mit $f_1 = f_2$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus k(r)$ nach Definition von $R_{h,r}$.

Weiter ist $R_{h,r} : (H_{0,h,r}^{\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{\alpha}) \longrightarrow (\tilde{H}_{h,r}^{\alpha}, \|\cdot\|_{\alpha+k}')$

für beschränktes Ω stetig nach Satz 2.6 und injektiv nach Satz 3.3. Damit ist es sinnvoll, $R_{h,r}^{-1}$ zu betrachten. Zunächst jedoch noch eine

3.11 Definition

Für $0 < r < R$, $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a) T_{h,r,R} := R_{h,r}(H_0^0(k(R)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2)) ,$$

$$b) T(n) := \{ g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \exists (g_{s,k})_{k=1,\dots,n} \in L_2^2(\mathbb{R}) , \\ \exists (g_{c,k})_{k=0,\dots,n} \in L_2^2(\mathbb{R}) , \text{ soda\ss } \forall t, \theta \in \mathbb{R} :$$

$$g(t, \theta) = \sum_{k=1}^n g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^n g_{c,k}(t) \cos(k\theta) ,$$

$$c) T_{h,r,R}(n) := T_{h,r,R} \cap T(n) .$$

3.12 Satz

Sei $0 < r < R' < R$, $\alpha, \beta \geq 0$,

$$R_{h,r}: (H_{0,h,r}^\alpha(k(R)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2), ||| \cdot |||_\alpha) \longrightarrow (T_{h,r,R}, ||| \cdot |||_\beta) .$$

Dann gilt

$$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : ||| R_{h,r}^{-1} |_{T_{h,r,R}(n)} ||| \geq C \cdot \left(\frac{R'}{r}\right)^n .$$

Insbesondere ist $R_{h,r}^{-1} |_{T_{h,r,R}}$ unstetig .

Beweis : folgt sofort aus Satz 3.8 .

Von einem Rekonstruktionsverfahren wird man zwar nicht unbedingt erwarten, daß es auf $T_{h,r,R}$ die hohle Radontransformation exakt invertiert, jedoch sollte der Inversionsoperator zumindest angenähert werden. Aber selbst dann ist der Rekonstruktionsoperator unstetig :

3.13 Satz

Sei $0 < r < R' < R$, $\alpha, \beta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in]0, 1[$,

$R_{h,r}: (H_{0,h,r}^\alpha(k(R)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2), ||| \cdot |||_\alpha) \longrightarrow (T_{h,r,R}, ||| \cdot |||_\beta)$,

$S: (T_{h,r,R}^{(n)}, ||| \cdot |||_\beta) \longrightarrow (H_{0,h,r}^\alpha(k(R)), ||| \cdot |||_\alpha)$, sodaß

$$\forall g \in T_{h,r,R}^{(n)}: ||| R_{h,r}^{-1} g - Sg |||_\alpha \leq \mu ||| g |||_\beta.$$

Dann

$$\exists C > 0: ||| S ||| \geq C \cdot \left(\frac{R'}{r}\right)^n - \mu.$$

Dabei kann C unabhängig von n und μ gewählt werden.

Ist

$S: (T_{h,r,R}, ||| \cdot |||_\beta) \longrightarrow (H_{0,h,r}^\alpha(k(R)), ||| \cdot |||_\alpha)$, sodaß

$$\forall g \in T_{h,r,R}: ||| R_{h,r}^{-1} g - Sg |||_\alpha \leq \mu ||| g |||_\beta,$$

so ist S unstetig.

Beweis:

Sei C die Konstante aus Satz 3.12. Dann

$$\exists g \in T_{h,r,R}^{(n)}: ||| R_{h,r}^{-1} g |||_\alpha \geq C \left(\frac{R'}{r}\right)^n ||| g |||_\beta,$$

und daher

$$||| Sg |||_\alpha \geq ||| R_{h,r}^{-1} g |||_\alpha - ||| Sg - R_{h,r}^{-1} g |||_\alpha$$

$$\geq C \left(\frac{R'}{r}\right)^n ||| g |||_\beta - \mu ||| g |||_\beta$$

$$= (C \left(\frac{R'}{r}\right)^n - \mu) ||| g |||_\beta.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Da

$$C \left(\frac{R'}{r}\right)^n - \mu \longrightarrow \infty \text{ für } n \longrightarrow \infty,$$

ergibt sich daraus auch sofort der zweite Teil.

§ 4

Beschnittene Projektionen

Der komplementäre Fall zu den hohlen Projektionen sind die beschnittenen Projektionen. Sie treten auf, wenn der Arzt sich nur für ein bestimmtes Organ interessiert und aus Gründen des Strahlenschutzes die äußeren Anteile einer jeden Projektionen ausgeblendet werden.

4.1 Definition

Sei $r \in]0,1[$, $\alpha \geq 0$,

$$\tilde{H}_{b,r}^{\alpha} := \{ g : [-r,r] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists h \in \tilde{H}^{\alpha} : h = g \text{ auf } [-r,r] \times \mathbb{R} \}.$$

Dann heißt

$$R_{b,r} : H_0^{\alpha}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \tilde{H}_{b,r}^{\alpha+k} \\ f \longmapsto Rf|_{[-r,r] \times \mathbb{R}}$$

beschnittene Radontransformation.

4.2 Definition

Sei $r \in]0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ und $f \in L_2^1(\mathbb{R}^2)$. Dann heißt

$$P_{\theta,b,r} f := P_{\theta} f|_{[-r,r]}$$

beschnittene Projektion von f zum Winkel θ .

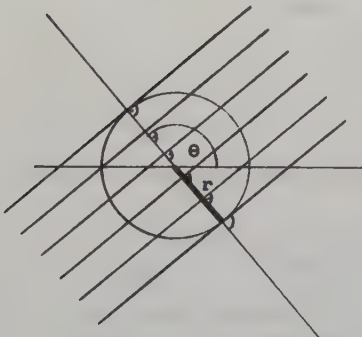


Abb. 4.1 Beschnittene Projektion

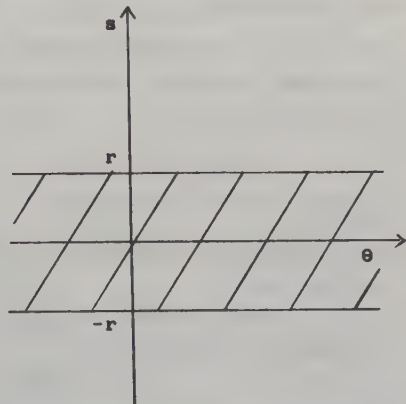


Abb. 4.2 Definitionsbereich der beschnittenen Radontransformation

Genau wie bei den hohlen Projektionen ist das Inversionsproblem aus beschnittenen Projektionen identisch mit der Inversion der beschnittenen Radontransformation, denn es liegen in beiden Fällen genau die Werte

$$Rf(s, \theta) \quad \text{mit} \quad |s| \leq r$$

vor.

Jedoch kann man im Gegensatz zum Fall der hohlen Projektionen eine Dichtefunktion f aus beschnittenen Projektionen nicht eindeutig rekonstruieren. Diese Aussage ist relativ leicht einzusehen und wurde in [2] (Satz 4.1.1 - 4.1.4) bewiesen. Da [2] als Diplomarbeit nicht allgemein zugänglich ist und diese Nichteindeutigkeitssätze später benötigt werden, werden sie hier (Satz 4.3 - 4.6) nochmals formuliert, etwas erweitert und ihre Beweise skizziert. Zunächst wird gezeigt, wie gering die Aussagekraft der beschnittenen Projektionen über die Dichtefunktion f für $|x| > r$ ist. Bei nahezu beliebiger Vorgabe von f und $R > r$ wird eine Funktion f° konstruiert, die mit f für $|x| \geq R$ übereinstimmt, deren beschnittene Projektionen jedoch identisch gleich 0 sind.

4.3 Satz

Sei $M \in \mathbb{N}_0$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) = \sum_{k=-M}^M f_k(t) e^{ik\theta} .$$

mit geeigneten $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für $k \in \{-M, \dots, M\}$.

Für $0 < r < R$ gibt es dann eine Funktion $f^\circ \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : f^\circ(x) = f(x) \quad \text{und}$$

$$R_{b,r} f^\circ = 0 .$$

Beweis :

Die Radontransformierte Rf läßt sich nach Cormack [6] darstellen als

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : Rf(s, \theta) = \sum_{k=-M}^M g_k(s) e^{ik\theta} \quad \text{mit}$$

$$\forall k \in \{-M, \dots, M\} : g_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}) .$$

Nun sei $\tilde{z} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit den Eigenschaften

a) $\forall s \in \mathbb{R}, |s| \leq r : \tilde{z}(s) = 0$,

b) $\forall s \in \mathbb{R}, |s| \geq R : \tilde{z}(s) = 1$.

Nach Lemma 3.4 existieren Funktionen $h_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für alle $k \in \{-M, \dots, M\}$ mit

a) $\forall s \in \mathbb{R}, s \notin [r, R] : h_k(s) = 0$,

b) $\forall m \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} s^m (g_k(s) \tilde{z}(s) + h_k(s)) ds = 0$.

Schließlich sei $\hat{g}$ durch

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : \hat{g}(s, \theta) := \sum_{k=-M}^M (g_k(s) \tilde{z}(s) + h_k(s)) e^{ik\theta}$$

und $\tilde{g}$ durch

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : \tilde{g}(s, \theta) := \frac{1}{2} (\hat{g}(s, \theta) + \hat{g}(-s, \theta + \pi))$$

definiert.

Die Funktion $\tilde{g}$ erfüllt die Bedingungen von Satz 2.8

a) $\forall \alpha \geq 0 : \tilde{g} \in \tilde{H}^{\alpha + \frac{1}{2}}$,

b) $S := \sup \{ |s| : s \in \mathbb{R}, \exists k \in \{-M, \dots, M\} : g_k(s) \neq 0 \}$
existiert wegen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und es gilt :

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \geq \max(S, R) : \hat{g}(s, \theta) = 0 \text{ und } \tilde{g}(s, \theta) = 0.$$

c) $\forall s, \theta \in \mathbb{R} : \tilde{g}(s, \theta) = \frac{1}{2} (\hat{g}(s, \theta) + \hat{g}(-s, \theta + \pi))$
 $= \frac{1}{2} (\hat{g}(-(-s), (\theta + \pi) + \pi) + \hat{g}(-s, \theta + \pi))$
 $= \tilde{g}(-s, \theta + \pi),$

d) $\forall m \in \{0, \dots, M\} :$

$$\int_{\mathbb{R}} s^m \tilde{g}(s, \theta) ds = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} s^m (\hat{g}(s, \theta) + \hat{g}(-s, \theta + \pi)) ds =$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} s^m \hat{g}(s, \theta) ds + (-1)^m \int_{\mathbb{R}} s^m \hat{g}(s, \theta + \pi) ds \right) = 0$$

nach Konstruktion der (h_k) .

Aufgrund der besonderen Gestalt von g ist Bedingung d) aus Satz 2.8 auch für $m > M$ erfüllt.

Außerdem gilt

e) $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \geq R :$

$$\begin{aligned}\hat{g}(s, \theta) &= \sum_{k=-M}^M (g_k(s) \tilde{z}(s) + h_k(s)) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-M}^M g_k(s) e^{ik\theta} = Rf(s, \theta),\end{aligned}$$

d. h. wegen $Rf(s, \theta) = Rf(-s, \theta + \pi) : \hat{g}(s, \theta) = Rf(s, \theta) .$

f) $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \leq r :$

$$\begin{aligned}\hat{g}(s, \theta) &= \sum_{k=-M}^M (g_k(s) \tilde{z}(s) + h_k(s)) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-M}^M (g_k(s) \cdot 0 + 0) e^{ik\theta} = 0,\end{aligned}$$

also auch $\hat{g}(s, \theta) = 0 .$

Daher gibt es eine Funktion f° mit $f^\circ \in H_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ für alle $\varepsilon \geq 0$, also $f^\circ \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, mit $Rf^\circ = \hat{g}$ und es gilt :

a) $\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : f^\circ(x) = f(x)$ nach Satz 3.3, denn

$$R_{h,R} f^\circ = R_{h,R} f \quad \text{nach e)} \quad \text{und}$$

b) $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \leq r : Rf^\circ(s, \theta) = 0$ nach f) .

Damit ist der Satz für komplexwertige Funktionen f bewiesen.

Ist f reellwertig, so kann man durch $\tilde{f}^\circ := \frac{1}{2} (f^\circ + \overline{f^\circ})$ eine reellwertige Funktion $\tilde{f}^\circ \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ definieren mit

a) $\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : \tilde{f}^\circ(x) = f(x)$ und

b) $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \leq r : R\tilde{f}^\circ(s, \theta) = 0 .$

Satz 4.3 wurde in [2] nur für den Spezialfall $M = 0$ bewiesen.

Man kann diesem Satz entnehmen, daß die beschnittenen Projektionen nahezu keine Aussage über die Dichtefunktion f außerhalb des Kreises $k(r)$ zulassen. Nun wird in Satz 4.4 und 4.5 noch gezeigt, daß f auch innerhalb von $k(r)$ durch beschnittene Projektionen keineswegs eindeutig bestimmt ist.

4.4 Satz

Für $0 < r < R$ gibt es eine Funktion $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit den folgenden Eigenschaften :

- a) $R_{b,r} h = 0$,
- b) $\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : h(x) = 0$,
- c) $\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq r : h(x) > 0$ und
- d) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \leq r :$

$$\frac{d^{2n}}{dt^{2n}} h(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) > 0 .$$

Beweis :

Sei $p \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit den Eigenschaften

- a) $\forall t \in \mathbb{R} : p(t) = p(-t)$,
- b) $\forall t \in [r, R] : p(t) < 0$
- c) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \notin [r, R] : p(t) = 0$.

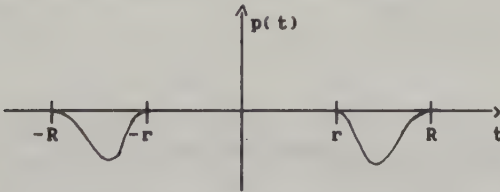


Abb. 4.3

Nach Satz 2.8 gibt es eine Funktion $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : R h(t, \theta) = p(t) \quad \text{und daher nach Satz 3.3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : h(x) = 0 .$$

Eigenschaft a) in Satz 4.4 ergibt sich sofort aus der Forderung c) an p . Die Funktion h und ihre radialen Ableitungen kann man mit der Radonschen Inversionsformel (Satz 2.7) berechnen. Aufgrund der speziellen Gestalt von p sind die folgenden Umformungen unter der Voraussetzung $|t| \leq r$ völlig unproblematisch und liefern sofort c) und d) in Satz 4.4. :

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| < r :$

$$\frac{d^{2n}}{dt^{2n}} h(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \int_0^\infty \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} p'(t \cos(\xi - \theta) + q) d\xi dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\xi - \theta) p^{(2n+1)}(t \cos(\xi - \theta) + q) d\xi dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{(2n)!}{q^{2n+1}} \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\xi - \theta) p(t \cos(\xi - \theta) + q) d\xi dq > 0 .$$

Aus dieser einen Funktion h kann man nun einen unendlich-dimensionalen Raum von Funktionen mit den Eigenschaften a) und b) aus Satz 4.4 erzeugen :

4.5 Satz

Sei $0 < r < R$, U offene Teilmenge von $k(r)$ und

$T := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : R_{b,r} f = 0 \quad \text{und}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : f(x) = 0 \} .$$

Dann gilt $\dim \{ f|_U : f \in T \} = \infty$.

Beweis :

Es genügt offenbar, den Satz für eine offene Kreisscheibe

$$k(y, \delta) := \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < \delta \} \subset k(r)$$

anstelle von U zu beweisen.

Satz 4.4 liefert mit $\tilde{r} := \frac{r+R}{2}$ anstelle von r eine Funktion $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : h(x) = 0 \quad \text{und}$$

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \leq \frac{r+R}{2} : Rh(s, \theta) = 0 .$$

Sei nun

$$\forall \tau \in [1, \frac{3r+R}{4r}] \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 : f_\tau(x) := h(\tau x - (\tau-1)y) .$$

Dann gilt für alle $\tau \in [1, \frac{3r+R}{4r}]$:

a) $f_\tau \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

b) $\forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : f_\tau(x) = 0$, denn
 $|\tau x - (\tau-1)y| \geq \tau R - (\tau-1)r = R + (\tau-1)(R-r) \geq R$

c) $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \leq r$ gilt mit $z := (\cos(\theta), \sin(\theta))$:

$$\begin{aligned} Rf_\tau(s, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} f_\tau(s\omega + t\omega^\perp) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau s\omega + \tau t\omega^\perp - (\tau-1)y) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} h(\tau s\omega - (\tau-1)y + t\omega^\perp) dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}} h((\tau s - (\tau-1)\langle y, \omega \rangle)\omega + t\omega^\perp) dt \\ &= \frac{1}{\tau} Rh(\tau s - (\tau-1)\langle y, \omega \rangle, \theta) = 0 , \end{aligned}$$

denn $|\tau s - (\tau-1)\langle y, \omega \rangle| \leq \tau r + (\tau-1)r = (2\tau-1) \cdot r \leq \frac{r+R}{2}$.

Also ist $f_\tau \in T$.

$\tilde{h}$ und $\tilde{f}_\tau$ seien die Darstellungen von h und f_τ in Polarkoordinaten, d.h. es sei

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : \tilde{h}(s, \theta) := h(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) \quad \text{und}$$

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R} : \tilde{f}_\tau(s, \theta) := f_\tau(s \cos(\theta), s \sin(\theta)) .$$

Wählt man s_y und θ_y so, daß $y = (s_y \cos(\theta_y), s_y \sin(\theta_y))$ ist, so erhält man nach Konstruktion von h für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} \tilde{f}_\tau(s_y, \theta_y) = \tau^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} \tilde{h}(s_y, \theta_y) > 0 .$$

Da die Vektoren $(1, \tau^2, \tau^4, \tau^6, \dots)$ für $\tau \in [1, \frac{3r+R}{4r}]$ linear unabhängig sind, spannen die Funktionen f_τ einen

Teilraum von T auf, der auch bei Einschränkung der Definitionsbereiche seiner Elemente auf $k(y, \delta)$ unendlichdimensional ist. Erst recht gilt also :

$$\dim \{ f|_{k(y, \delta)} : f \in T \} = \infty.$$

Aus Satz 4.3 und 4.5 erhält man sofort folgenden

4.6 Satz

Sei $0 < r < R$ und

$$T := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : R_{b,r} f = 0 \quad \text{und} \\ \forall x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq R : f(x) = 0 \}.$$

Dann gilt für jede offene Teilmenge U von $k(R)$:

$$\dim \{ f|_U : f \in T \} = \infty.$$

Um die Aussichtslosigkeit der Bildrekonstruktion aus beschnittenen Projektionen auch für den Fall einzusehen, in dem durch geeignete Voraussetzungen über die Dichtefunktion Eindeutigkeit gewährleistet wird, werden hier ähnliche Aussagen wie in § 3 bewiesen. Zunächst wird der Bildraum der beschnittenen Radontransformation charakterisiert.

4.7 Satz

Sei $\alpha \geq 0, R > r > 0, M \in \mathbb{N}$. Ist

- a) $g \in \tilde{H}_{b,r}^{\alpha+\frac{1}{2}}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \leq r : g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi)$ und
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \leq r :$

$$g(t, \theta) = \sum_{k=1}^M g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^M g_{c,k}(t) \cos(k\theta)$$

mit geeigneten Funktionen

$$g_{s,k} \in L_2^1(\mathbb{R}) \text{ für } k \in \{1, \dots, M\} \quad \text{und} \\ g_{c,k} \in L_2^1(\mathbb{R}) \text{ für } k \in \{0, \dots, M\},$$

so $\exists f \in H_0^\alpha(k(R)) : R_{b,r} f = g$.

Beweis analog zum Beweis von Satz 3.5 :

Nach Definition von $\tilde{H}_{b,r}^{\kappa+k}$ gibt es ein $\tilde{g} \in \tilde{H}^{\kappa+k}$ mit $g = \tilde{g}$ auf $]-r, r[\times \mathbb{R}$. O.B.d.A. sei dieses $\tilde{g}$ so gewählt, daß $\forall s, \theta \in \mathbb{R}, |s| \geq R : \tilde{g}(s, \theta) = 0$.

Dieses $\tilde{g}$ läßt sich trigonometrisch entwickeln :

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : \tilde{g}(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_{c,k}(t) \cos(k\theta).$$

Sei nun $\hat{g}$ definiert durch

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : \hat{g}(t, \theta) := \sum_{k=1}^M \tilde{g}_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^M \tilde{g}_{c,k}(t) \cos(k\theta).$$

Dann gilt $\hat{g} \in \tilde{H}^{\kappa+k}$ und nach Voraussetzung c) gilt :

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \leq r : \hat{g}(t, \theta) = g(t, \theta).$$

Nach Lemma 3.4 existieren Funktionen

$$h_{s,k} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ für } k \in \{1, \dots, M\} \text{ und}$$

$$h_{c,k} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ für } k \in \{0, \dots, M\}$$

mit den folgenden Eigenschaften :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \notin [r, R] : h_{s,k}(t) = 0, h_{c,k}(t) = 0 \text{ und}$$

$$\forall m \in \{0, \dots, M\} : \int_{\mathbb{R}} t^m (\tilde{g}_{s,k}(t) + h_{s,k}(t)) dt = 0 \text{ und}$$

$$\int_{\mathbb{R}} t^m (\tilde{g}_{c,k}(t) + h_{c,k}(t)) dt = 0.$$

Sei nun für alle $t, \theta \in \mathbb{R}$ $\hat{g}$ durch

$$\begin{aligned} \hat{g}(t, \theta) := & \sum_{k=1}^M (\tilde{g}_{s,k}(t) + h_{s,k}(t)) \sin(k\theta) + \\ & \sum_{k=0}^M (\tilde{g}_{c,k}(t) + h_{c,k}(t)) \cos(k\theta) \end{aligned}$$

und schließlich g^* durch $g^*(t, \theta) := \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta + \pi))$ definiert.

Dann erfüllt g^* die Bedingungen von Satz 2.8 :

- a) $g \in \tilde{H}^{\alpha+k}$,
 $((t, \theta) \mapsto h_{a,k}(t) \sin(k\theta)) \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ für $k \in \{1, \dots, M\}$,
 $((t, \theta) \mapsto h_{c,k}(t) \cos(k\theta)) \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ für $k \in \{0, \dots, M\}$.
 Also gilt auch $\hat{g} \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ und $g^* \in \tilde{H}^{\alpha+k}$.

- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R$:
 $g^*(t, \theta) = \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta+\pi))$
 $= \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta+\pi))$
 $= 0$

nach Wahl von $\tilde{g}$.

- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}$:
 $g^*(t, \theta) = \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta+\pi))$
 $= \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta+2\pi) + \hat{g}(-t, \theta+\pi))$
 $= \frac{1}{2} (\hat{g}(-t, \theta+\pi) + \hat{g}(t, (\theta+\pi)+\pi))$
 $= g^*(-t, \theta+\pi)$.

- d) $\forall m \in \{0, \dots, M\}$:

$$\int_{\mathbb{R}} t^m g^*(t, \theta) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} t^m (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta+\pi)) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} t^m \hat{g}(t, \theta) dt + (-1)^m \int_{\mathbb{R}} t^m \hat{g}(t, \theta+\pi) dt \right) = 0$$

nach Konstruktion der Funktionen $h_{a,k}$ und $h_{c,k}$.

Also ist für alle $m \in \{0, \dots, M\}$ obiges Integral konstant 0 und damit ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades, für $m > M$ ist diese Bedingung aufgrund des endlichen Reihenansatzes automatisch erfüllt.

Nach Satz 2.8 existiert ein $f \in H_0^\alpha(k(R))$: $Rf = g^*$.

Da für alle $t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \leq r$

$$g^*(t, \theta) = \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta+\pi)) = \frac{1}{2} (\hat{g}(t, \theta) + \hat{g}(-t, \theta+\pi))$$

$$= \frac{1}{2} (g(t, \theta) + g(-t, \theta+\pi)) = g(t, \theta)$$

gilt, folgt die Behauptung des Satzes $R_{b,r}f = g$.

Nach Satz 2.8 sind die Forderungen a) und b) in Satz 4.7 notwendig, während es c) sicherlich nicht ist. Andererseits sind a) und b) alleine keine hinreichenden Konsistenzbedingungen (siehe Satz 4.9). Dies konnte hier mangels eines Eindeutigkeitssatzes nicht wie bei den hohlen Projektionen direkt gezeigt werden. Der folgende Satz ist grundlegend für die restlichen Aussagen dieses Paragraphen.

4.8 Satz

Sei $0 < r < R$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$, n gerade, Funktionen $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

- a) $\forall \alpha \geq 0 : g_n \in \tilde{H}^{\alpha+k}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = g_n(-t, \theta + \pi)$ und
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = \tilde{z}(t) \sin(n\theta)$
mit geeigneter Funktion $\tilde{z} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

und es gilt :

$\forall \alpha, \beta \geq 0 \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade} \forall f \in H_0^\alpha(k(\mathbb{R}))$ mit der Eigenschaft $R_{b,r} f = g_n \mid_{[-r,r] \times \mathbb{R}}$:

$$\|f\|_\alpha > C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2} \|g_n\|_\beta.$$

Beweis :

Es gibt eine Funktion $\tilde{z} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit

- a) $\forall t \in \mathbb{R} : \tilde{z}(t) = \tilde{z}(-t)$,
- b) $\forall t \in [-r, r] : \tilde{z}(t) = 1$.

Weiter sei

$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade} \forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) := \tilde{z}(t) \sin(n\theta)$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade} : g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und g_n erfüllt die Bedingungen a) - c) des Satzes:

- a) $\forall \alpha \geq 0 : g_n \in \tilde{H}^{\alpha+k}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = \tilde{z}(t) \sin(n\theta)$
 $= \tilde{z}(-t) \sin(n(\theta + \pi))$
 $= g_n(-t, \theta + \pi)$,
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) = \tilde{z}(t) \sin(n\theta)$
nach Konstruktion von g_n .

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, n gerade und $\alpha, \beta \geq 0$ fest gewählt, $m := n/2$.
Für $f \in H_0^{\alpha}(k(R))$ mit $R_{b,r} f = g_n|_{[-r,r] \times \mathbb{R}}$ und $g_n^* := Rf$
gilt dann nach Satz 2.8 insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (R^2 - t^2)^{m-1} g_n^*(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-r}^r (R^2 - t^2)^{m-1} g_n(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-r, r]} (R^2 - t^2)^{m-1} g_n^*(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta. \end{aligned}$$

Abschätzung der beiden Terme liefert nun die Behauptung :

a) Für $m > 1$ gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_{-r}^r (R^2 - t^2)^{m-1} g_n(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} \int_{-r}^r (R^2 - t^2)^{m-1} \xi(t) \sin^2(n\theta) dt d\theta = \\ &\pi \int_{-r}^r (R^2 - t^2)^{m-1} dt = 2\pi \int_0^r (R-t)^{m-1} (R+t)^{m-1} dt \geq \\ &2\pi R^{m-1} \int_0^r (R-t)^{m-1} dt = 2\pi R^{m-1} \frac{1}{m} (R^m - (R-r)^m) \geq \\ &2\pi R^{m-1} \frac{1}{m} (R^m - (R-r) R^{m-1}) = 2\pi \frac{1}{m} r R^{2m-2}. \end{aligned}$$

Für $m=1$ folgt analog

$$\int_0^{2\pi} \int_{-r}^r (R^2 - t^2)^{1-1} g_n(t, \theta) \sin(n\theta) dt d\theta = 2\pi \frac{1}{1} r R^{2 \cdot 1 - 2}.$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \quad & \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-r, r]} (R^2 - t^2)^{m-1} g_n^*(t, \theta) \sin(n\theta) \, dt \, d\theta \leq \\
 & \left(\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-r, r]} (R^2 - t^2)^{2m-2} g_n^{*2}(t, \theta) \, dt \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \pi^{\frac{1}{2}} (R^2 - r^2)^{m-1} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_n^{*2}(t, \theta) \, dt \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \pi^{\frac{1}{2}} (R^2 - r^2)^{m-1} \|g_n^*\|_0^{\frac{1}{2}} \leq \pi^{\frac{1}{2}} (R^2 - r^2)^{m-1} \|g_n^*\|_{\alpha+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Setzt man α) und β) in obige Konsistenzgleichung ein, so erhält man

$$\pi^{\frac{1}{2}} (R^2 - r^2)^{m-1} \|g_n^*\|_{\alpha+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \geq 2\pi \frac{1}{m} r R^{2m-2}.$$

Zusammen mit Satz 2.6 folgt

$$\|f_n\|_{\alpha} \geq C' \|g_n^*\|_{\alpha+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \geq C' 2\pi^{\frac{1}{2}} r \frac{2}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2}.$$

Da $\|g_n\|_{\beta}'$ nach Konstruktion von g_n konstant ist, folgt aus dieser Ungleichung die Behauptung des Satzes.

4.9 Satz

Sei $R > r > 0$. Dann gibt es ein g mit

$$a) \quad \forall \alpha \geq 0 : g \in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

$$b) \quad \forall t, \theta \in \mathbb{R} : g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi)$$

$$\text{und } \forall \alpha \geq 0 \quad \forall f \in H_0^{\alpha}(k(R)) : R_{b,r} f \neq g|_{[-r, r] \times \mathbb{R}}.$$

Beweis :

$(g_n)_n$ gerade seien die in Satz 4.8 konstruierten Funktionen, C die dortige Konstante. Dann existiert eine Folge $n_1 < n_2 < \dots$ mit der Eigenschaft

$$\forall k \in \mathbb{N} : C \frac{1}{n_k} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n_k} \geq 4^k.$$

Da für alle $\alpha \geq 0$ ($\|g_{n_k}\|_{\alpha+\frac{1}{2}}'$ $k \in \mathbb{N}$ konstant ist, existiert

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} g_{n_k} \in \tilde{H}^{\alpha+\frac{1}{2}} \text{ für alle } \alpha \geq 0.$$

Dieses g erfüllt offenbar Voraussetzung a) und b) des Satzes. Nun wird die Annahme, daß es ein $\alpha \geq 0$ und ein $f \in H_0^\alpha(k(\mathbb{R}))$ gibt mit $R_{b,r}f = g|_{[-r,r] \times \mathbb{R}}$ zum Widerspruch geführt.

f läßt sich in $L_2^2(\mathbb{R}^2)$ entwickeln in der Form

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \text{mit}$$

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : f_n(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) = f_{s,n}(t) \sin(n\theta) + f_{c,n}(t) \cos(n\theta).$$

und geeigneten $f_{s,n}, f_{c,n} \in L_2^2(\mathbb{R})$.

Dann läßt sich nach Cormack [6] Rf_n darstellen als

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : Rf_n(t, \theta) = g_{s,n}(t) \sin(n\theta) + g_{c,n}(t) \cos(n\theta)$$

mit geeigneten $g_{s,n}, g_{c,n} \in L_0^2(\mathbb{R})$.

Dies bedeutet insbesondere für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$R_{b,r}f_{n_k} = \frac{1}{2^k} g_{n_k}|_{[-r,r] \times \mathbb{R}} \quad \text{und damit} \quad \|f_{n_k}\|_0 \geq 2^k \|g_{n_k}\|_0$$

nach Konstruktion der (g_{n_k}) .

Da $(\|g_n\|_0)$ konstant ist, widerspricht diese Ungleichung der Konvergenz von $\sum f_n$. Also kann es kein $\alpha \geq 0$ und $f \in H_0^\alpha(k(\mathbb{R}))$ geben mit $R_{b,r}f = g|_{[-r,r] \times \mathbb{R}}$.

Damit ist wie bereits oben angedeutet gezeigt, daß die Bedingungen a) und b) in Satz 4.7 nicht hinreichend sind für die Existenz einer Funktion f mit $R_{b,r}f = g|_{[-r,r] \times \mathbb{R}}$. Die Suche nach notwendigen und hinreichenden Konsistenzbedingungen, die wie jene in Satz 2.8 numerisch verwertbar, also zumindest stetig sind, endet genau wie im Fall der hohlen Projektionen (Satz 3.7) ergebnislos:

4.10 Satz

Sei $\alpha \geq 0$, $R > r > 0$,

$\mu: \tilde{H}^{\alpha+k}(R) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$(1) \quad \forall g_1, g_2 \in \tilde{H}^{\alpha+k}(R), \quad g_1 = g_2 \text{ auf } [-r, r] \times \mathbb{R} :$$

$$\mu(g_1) = \mu(g_2) ,$$

$$(2) \quad \forall f \in H_0^\alpha(k(R)) : \quad \mu(Rf) = 0 .$$

Dann gilt für alle g mit

$$a) \quad g \in \tilde{H}^{\alpha+k}(R) ,$$

$$b) \quad \forall t, \theta \in \mathbb{R} : \quad g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi) :$$

$$\mu(g) = 0 .$$

Beweis :

Sei g eine Funktion mit den Eigenschaften a) und b) . Dann läßt sich g entwickeln in der Form

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : \quad g(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{c,k}(t) \cos(k\theta)$$

und g_n sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : \quad g_n(t, \theta) := \sum_{k=1}^n g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^n g_{c,k}(t) \cos(k\theta) .$$

Dann gilt nach Satz 4.7 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f_n \in H_0^\alpha(k(R)) : \quad R_{b,r} f_n = g_n \mid [-r, r] \times \mathbb{R} .$$

$$\text{Sei für } n \in \mathbb{N} \quad g_n^* := R f_n .$$

Nach Voraussetzung (2) gilt $\mu(g_n^*) = 0$, also nach (1) auch $\mu(g_n^*) = \mu(g_n) = 0$. Da $g_n \rightarrow g$ in $\tilde{H}^{\alpha+k}$ und μ stetig ist, folgt : $\mu(g_n) \rightarrow \mu(g)$, also

$$\mu(g) = 0 .$$

Nachdem also keine Aussicht besteht, wie im Falle vollständiger Daten durch stetige Konsistenzbedingungen zu klären, ob es ein Urbild bezüglich der beschnittenen Radontransfor-

mation gibt, wird nun der Frage nachgegangen, ob ein Inversionsoperator der beschnittenen Radontransformation stetig sein kann. Als Grundlage dient der Satz 4.8.

Zur Formulierung eines Satzes über (Quasi-) Inversionsoperatoren der beschnittenen Radontransformation benötigen wir noch einige Definitionen :

4.11 Definition

Für $0 < r < R$, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \geq 0$ sei

a) $\|\cdot\|'_\alpha$ definiert durch

$$\forall g \in \tilde{H}_{b,r}^\alpha :$$

$$\|g\|'_\alpha := \inf \{ \|h\|'_\alpha : h \in \tilde{H}^\alpha, g = h \text{ auf } [-r, r] \times \mathbb{R} \} ,$$

$$b) T_{b,r,R} := R_{b,r}(H_0^0(k(R)) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2)) ,$$

$$c) T(n) := \{ g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \exists (g_{s,k})_{k=1,\dots,n} \subset L_2^2(\mathbb{R}) , \\ \exists (g_{c,k})_{k=0,\dots,n} \subset L_2^2(\mathbb{R}) , \text{ soda\ss } \forall t, \theta \in \mathbb{R} :$$

$$g(t, \theta) = \sum_{k=1}^n g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^n g_{c,k}(t) \cos(k\theta) \} ,$$

$$d) T_{b,r,R}(n) := T_{b,r,R} \cap T(n) .$$

Nach Satz 4.6 ist die Inversion der beschnittenen Radontransformation nicht eindeutig. Man wird jedoch von einem Rekonstruktionsoperator erwarten, da\ss man bei Anwendung der beschnittenen Radontransformation auf das Ergebnis einer Inversion die ursprünglichen Projektionsdaten wiedererh\alt.

4.12 Satz

Sei $0 < r < R$, $\alpha, \beta \geq 0$,

$$T : (T_{b,r,R}, \|\cdot\|'_\beta) \longrightarrow (H_0^\alpha(k(R)), \|\cdot\|'_\alpha)$$

mit der Eigenschaft

$$\forall g \in T_{b,r,R} : R_{b,r} T g = g|_{[-r,r] \times \mathbb{R}} .$$

Dann gilt

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \|T|_{T_{b,r,R}^{(n)}}\| \geq C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2}.$$

Insbesondere ist T unstetig.

Beweis : folgt sofort aus Satz 4.8, der Übergang der Indexmenge von den geraden zu allen natürlichen Zahlen ist unproblematisch.

Auch Näherungen eines solchen Rekonstruktionsoperators sind unstetig :

4.13 Satz

Sei $0 < r < R$, $\alpha, \beta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in]0, 1[$,

$$T : (T_{b,r,R}, \|\cdot\|_\beta') \longrightarrow (H_0^\alpha(k(R)), \|\cdot\|_\alpha)$$

mit der Eigenschaft

$$\forall g \in T_{b,r,R} : R_{b,r} Tg = g|_{[-r,r] \times \mathbb{R}},$$

$$S : (T_{b,r,R}^{(n)}, \|\cdot\|_\beta') \longrightarrow (H_0^\alpha(k(R)), \|\cdot\|_\alpha) \quad \text{und}$$

$$\forall g \in T_{b,r,R}^{(n)} : \|Sg - Tg\|_\alpha \leq \mu \|g\|_\beta'.$$

Dann gilt

$$\exists C > 0 : \|S\| \geq C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2} - \mu.$$

Dabei kann C unabhängig von n und μ gewählt werden.

Ist

$$S : (T_{b,r,R}, \|\cdot\|_\beta') \longrightarrow (H_0^\alpha(k(R)), \|\cdot\|_\alpha) \quad \text{und}$$

$$\forall g \in T_{b,r,R} : \|Sg - Tg\|_\alpha \leq \mu \|g\|_\beta',$$

so ist S unstetig.

Beweis :

Sei C die Konstante aus Satz 4.12. Dann

$$\exists g \in T_{b,r,R}^{(n)} : \|Tg\|_\alpha \geq C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2} \|g\|_\beta',$$

und daher

$$\begin{aligned}
 \|Sg\|_{\alpha} &\geq \|Tg\|_{\alpha} - \|Sg - Tg\|_{\alpha} \\
 &\geq C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2} \|g\|_{\beta}' - \mu \|g\|_{\beta}' \\
 &= \left(C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2} - \mu \right) \|g\|_{\beta}' .
 \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Da

$$C \frac{1}{n} \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2} \right)^{n/2} - \mu \longrightarrow \infty \text{ für } n \longrightarrow \infty ,$$

ergibt sich daraus auch sofort der zweite Teil.

§ 5

Angularbeschränkte Projektionen

Die dritte klassische Art unvollständiger Daten in der Computer - Tomographie bilden die angularbeschränkten Projektionen. Im Gegensatz zu den hohlen und beschnittenen Projektionen ist hier jede einzelne Projektion vollständig gegeben, dafür verfügt man aber nur über jene Projektionen, die in einem fest vorgegebenen Winkelbereich liegen. Solche Datensätze entstehen, wenn die Meßapparatur für eine Aufnahme nicht um 180° gedreht wird. Dies kann aus technischen Gründen nötig sein oder zur Reduzierung der Meßzeit und damit besseren Darstellung bewegter Objekte (z.B. Herz) versucht werden.

5.1 Definition

Sei $\tau \in]0, \pi[$, $\alpha \geq 0$,

$$\tilde{H}_{\alpha, \tau}^{\infty} := \{ g : \mathbb{R} \times [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R} : \exists h \in \tilde{H}^{\infty} : h|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]} = g \}.$$

Dann heißt

$$R_{\alpha, \tau} : H_0^{\infty}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \tilde{H}_{\alpha, \tau}^{\infty + k}$$

$$f \longmapsto Rf|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]}$$

angularbeschränkte Radontransformation.

5.2 Definition

Sei $\tau \in]0, \pi[$, $f \in L_2^1(\mathbb{R}^2)$. Dann heißen

$$(P_{\theta} f, \theta \in [0, \tau])$$

angularbeschränkte Projektionen von f .

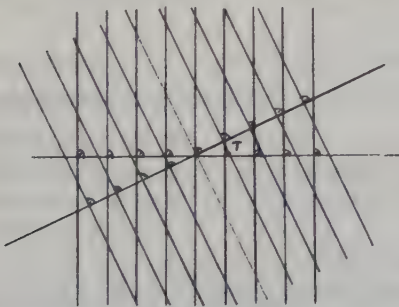


Abb 5.1 Angularbeschränkte Projektionen

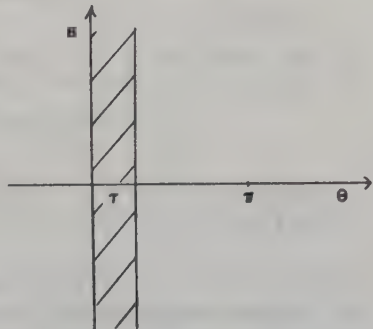


Abb. 5.2 Definitionsbereich der angularbeschränkten Projektionen

Die angularbeschränkten Projektionen bestimmen die Dichtefunktion f überall eindeutig :

5.3 Satz

Sei $f_1, f_2 \in L^1_0(\mathbb{R}^2)$, $\tau \in]0, \pi[$ und $R_{a, \tau} f_1 = R_{a, \tau} f_2$.
Dann gilt : $f_1 = f_2$.

Beweis : Helgason [13], Kap. I, Proposition 7.5 .

Ähnlich wie in den zwei vorangegangenen Paragraphen entspricht das Problem der Bildrekonstruktion aus angularbeschränkten Projektionen der Inversion der angularbeschränkten Radontransformation.

Ganz anders als dort können die Konsistenzbedingungen für vollständige Daten aus Satz 2.8 in wesentlich weiterem Umfang übertragen werden.

5.4 Bemerkung (Konsistenzbedingungen)

Sei $\kappa \geq 0$, $\tau \in [0, \pi]$, $R > 0$.

Ist $f \in H^{\kappa}_0(k(R))$ und $g = R_{a, \tau} f$, so gilt :

- a) $g \in \tilde{H}^{\kappa + \frac{1}{2}}_{a, \tau}$,
- b) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq R \quad \forall \theta \in [0, \tau] : g(t, \theta) = 0$,
- c) $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \cdot) dt$ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades auf $[0, \tau]$, das nur Anteile der Parität von m besitzt.

Beweis : folgt sofort aus Satz 2.8 .

Die Symmetriebedingung $g(t, \theta) = g(-t, \theta + \pi)$ ist hier in dieser Form wegen $\tau < \pi$ sinnlos, findet aber ihren Niederschlag in der Parität der Anteile des in c) definierten trigonometrischen Polynoms. Diese Formulierung könnte auch bei den vollständigen in Satz 2.8 als Äquivalent verwendet werden.

Zusammen mit der Voraussetzung einer endlichen Fourrierentwicklung sind die in 5.4 genannten Konsistenzbedingungen hinreichend :

5.5 Satz

Sei $\kappa \geq 0$, $\tau \in [0, \pi]$, $R > 0$, $M \in \mathbb{N}$. Ist

a) $g \in \tilde{H}_{a, \tau}^{\kappa+k}$,

b) $\forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq R \quad \forall \theta \in [0, \tau] : g(t, \theta) = 0$,

c) $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \cdot) dt$ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens m-ten Grades auf $[0, \tau]$, das nur Anteile der Parität von m besitzt,

d) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \theta \in [0, \tau] :$

$$g(t, \theta) = \sum_{k=1}^M g_{a, k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^M g_{c, k}(t) \cos(k\theta)$$

mit geeigneten Funktionen

$g_{a, k} \in L_2^1(\mathbb{R})$ für $k \in \{1, \dots, M\}$ und

$g_{c, k} \in L_2^1(\mathbb{R})$ für $k \in \{0, \dots, M\}$,

so $\exists f \in H_0^{\kappa}(k(R)) : R_{a, \tau} f = g$.

Der Beweis ist hier im Vergleich zu den analogen Sätzen für hohle und beschnittene Projektionen trivial :

Beweis :

Man kann g nach Voraussetzung d) fortsetzen auf $\mathbb{R}^2$ durch $\forall t, \theta \in \mathbb{R} :$

$$g^*(t, \theta) := \sum_{k=1}^M g_{a, k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^M g_{c, k}(t) \cos(k\theta) .$$

Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ sei
$$h_m(\cdot) := \int_{\mathbb{R}} t^m g^*(t, \cdot) dt .$$

Nach Konstruktion ist h_m ein trigonometrisches Polynom höchstens M -ten Grades, die Einschränkung von h_m auf $[0, \tau]$ ist nach c) ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades. Also ist h_m auch auf $[0, 2\pi]$ ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades und g^* erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.8. Es existiert damit ein $f \in H_0^\alpha(k(R))$ mit $Rf = g^*$, erst recht gilt also $R_{a, \tau} f = g$.

Nach Bemerkung 5.4 sind die Forderungen a) - c) in Satz 5.5 für die Existenz einer Funktion $f \in H_0^\alpha(k(R))$ mit der Eigenschaft $R_{a, \tau} f = g|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]}$ notwendig, während es d) sicherlich nicht ist. Andererseits sind a) - c) alleine keine hinreichenden Konsistenzbedingungen (siehe Satz 5.7). Dies wird hier ähnlich wie in § 4 gezeigt. Zunächst jedoch folgender grundlegender

5.6 Satz

Sei $\alpha, \beta \geq 0$, $\sigma := \max(0, \beta - \alpha - k)$, $\tau \in]0, \pi[$, $R > 0$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen g_n mit

- a) $g_n \in \tilde{H}^{\alpha+k}$,
- b) $\forall t \in \mathbb{R} \forall \theta \in [0, \tau] : g_n(t, \theta) = \xi_n(t) \sin^n(\theta - k\tau)$
mit einer geeigneten Funktion $\xi_n \in H_0^{\alpha+k}([-R, R])$,
- c) $\exists f_n \in H_0^\alpha(k(R)) : R_{a, \tau} f_n = g_n|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]}$,

und es gilt :

$\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} :$

$$\|f_n\|_\alpha > C n^{-\sigma} \sin^n\left(\frac{\tau}{2}\right) \|g_n\|_\beta .$$

Beweis :

1. Schritt Konstruktion der ξ_n :

$(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ seien die Legendrepolynome zum Intervall $[-R, R]$,

d.h. es gilt

a) $\forall k \in \mathbb{N}_0$: p_k ist ein Polynom k -ten Grades ,

b) $\forall k, l \in \mathbb{N}_0$:
$$\int_{-R}^R p_k(t) p_l(t) dt = \delta_{k,l} .$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ fest gewählt mit $N > \max(\alpha+k, \beta)$. Dann lassen sich für alle $n \in \mathbb{N}$ die Polynome $(p_n, p_{n+2}, \dots, p_{n+2N}, p_{n+2N+2})$ so zu einem Polynom $P_n \neq 0$ linear kombinieren, daß

$$\forall m \in \{0, 1, \dots, N\} : P_n^{(m)}(R) = 0 .$$

Da in der Linearkombination nur Legendrepolynome mit Indizes gleicher Parität auftreten und $p_n(t) = (-1)^n p_n(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, folgt für die gleichen m : $P_n^{(m)}(-R) = 0$.

Schließlich sei

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t \in \mathbb{R} : z_n(t) := \begin{cases} P_n(t) & \text{falls } t \in [-R, R] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist $\forall n \in \mathbb{N} : z_n \in H_0^N([-R, R]) \subset H_0^{\alpha+k}([-R, R]) \cap H_0^\beta([-R, R])$.

Nach Louis ([26], 4.7) ist durch

$$\forall \mu > 0 \forall p \in H_0^\mu([-R, R]) :$$

$$|p|_\mu := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k(k+1))^\mu \left| \int_{-R}^R p(t) p_k(t) dt \right|^2 \right)^{1/2}$$

eine zu $\|\cdot\|_\mu$ äquivalente Norm definiert.

Also gibt es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall p \in H_0^N([-R, R]) : \|p\|_{\alpha+k} \geq C_1 |p|_{\alpha+k} \quad \text{und}$$

$$|p|_\beta \geq C \|p\|_\beta .$$

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ falls $\alpha+k < \beta$:

$$\begin{aligned} \|z_n\|_{\alpha+k} &\geq C_1 |z_n|_{\alpha+k} \geq C_1 (n+2N+3)^{\alpha+k-\beta} |z_n|_\beta \\ &\geq C_1 C_2 (n+2N+3)^{\alpha+k-\beta} \|z_n\|_\beta \\ &\geq C_3 n^{\alpha+k-\beta} \|z_n\|_\beta . \end{aligned}$$

Ist jedoch $\beta \leq \alpha+k$, also das im Satz definierte $\sigma = 0$, so gibt es erst recht ein C_3 mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|z_n\|_{\alpha+k} \geq C_3 \|z_n\|_\beta \quad (\text{z.B. } C_3 := 1)$$

Zusammen erhält man mit $\sigma := \max(0, \beta - \alpha - k)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|z_n\|_{\alpha+k} \geq C_3 n^{-\sigma} \|z_n\|_\beta .$$

2. Schritt Abschätzung der L^2 - Norm von $\sin(.-k\tau)|_{[0,\tau]}$

Für festes $\mu \in]0,1[$ sei die Funktion H definiert durch

$$\forall t \in \mathbb{R} : H(t) := \frac{\sin(\mu t)}{\sin(t)}.$$

Sie nimmt ihr Maximum auf $[0, k\tau]$ in $k\tau$ an, wie folgende Überlegungen zeigen :

$$H'(t) = \frac{1}{\sin^2(t)} \underbrace{(\mu \sin(t) \cos(\mu t) - \sin(\mu t) \cos(t))}_{=: h(t)},$$

$$h'(t) = (1-\mu^2) \sin(t) \sin(\mu t).$$

Nun gilt :

$\forall t \in]0, k\tau[: h'(t) > 0$, also H' monoton wachsend auf $[0, k\tau]$; da $H'(0) = 0$ gilt auch $\forall t \in]0, k\tau[: H'(t) > 0$.

Damit ist gezeigt, daß H auf $[0, k\tau]$ monoton wachsend ist und daher das Maximum in $k\tau$ annimmt. Daher gilt

$$\forall t \in [0, k\tau] : \sin(\mu t) \leq \sin(\mu k\tau) \sin(t),$$

also insbesondere für $\mu := \frac{1}{\tau}$:

$$\forall t \in [0, k\tau] : \sin\left(\frac{1}{\tau} t\right) \leq \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin(t).$$

Damit läßt sich die gewünschte Abschätzung durchführen :

$$\int_0^\tau \sin^{2n}(t-k\tau) dt = 2 \int_0^{k\tau} \sin^{2n}(t) dt =$$

$$2 \frac{1}{\tau} \int_0^{k\tau} \sin^{2n}\left(\frac{1}{\tau} t\right) dt \leq 2 \frac{1}{\tau} \int_0^{k\tau} \sin^{2n}(k\tau) \sin^{2n}(t) dt =$$

$$\frac{1}{2\tau} \sin^{2n}(k\tau) \int_0^{2\tau} \sin^{2n}(t) dt.$$

3. Schritt Beweis des Satzes :

Sei $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n^k(t, \theta) := f_n(t) \sin^n(\theta - k\tau) \quad \text{und}$$

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) := \begin{cases} g_n^*(t, \theta) & \text{falls } \theta \in [0, \tau] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

- a) $g_n^* \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ nach Konstruktion von $\tilde{g}_n$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| \geq R : g_n^*(t, \theta) = 0$,
- c) $\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n^*(t, \theta) = g_n^*(-t, \theta + \pi)$,
denn die Legendrepolynome (p_k) haben die Eigenschaft
 $\forall t \in \mathbb{R} : p_k(t) = (-1)^k p_k(-t)$,
- d) $\forall m \in \mathbb{N}_0 :$

$$\int_{\mathbb{R}} t^m g_n^*(t, \cdot) dt$$
 ist ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades,

denn für $n \leq m$ gilt dies nach Definition von g_n^* und für $n > m$ ist obiges Integral nach Konstruktion von $\tilde{g}_n$ identisch gleich 0.

Nach Satz 2.8 existiert ein $f_n \in H_0^\alpha(k(\mathbb{R}))$ mit $Rf_n = g_n^*$, insbesondere ist dieses nach Satz 5.3 das einzige f_n mit $R_{a, \tau} f_n = g_n|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]}$.

Mit Hilfe von Satz 2.6 und den beiden vorbereitenden Schritten dieses Beweises ergibt sich nun sofort die Behauptung des Satzes :

$$\|f_n\|_\alpha \geq C_4 \|g_n^*\|_{\alpha+k}^{1.} \geq C_4 C_3 n^{-\sigma} \|g_n^*\|_\beta^{2.}$$

$$\stackrel{2.}{>} C n^{-\sigma} \sin^n\left(\frac{\tau}{2}\right) \|g_n\|_\beta^{1.}$$

Mit Hilfe der Konstruktionen im vorangegangenen Beweis kann man nun, wie bereits oben angekündigt, zeigen, daß die in Bemerkung 5.4 angegebenen Konsistenzbedingungen nicht hinreichend sind :

5.7 Satz

Sei $\alpha \geq 0$, $\tau \in [0, \pi]$, $R > 0$. Dann gibt es ein g mit

- a) $g \in \tilde{H}^{\alpha+k}$,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| > R : g(t, \theta) = 0$,
- c) $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \cdot) dt$ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades auf $[0, \tau]$, das nur Anteile der Parität von m besitzt,

und $\forall f \in H_0^0(k(R)) : R_{a, \tau} f \neq g|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]}$.

Beweis :

Sei $N \in \mathbb{N}$ und $N > \alpha + k$, $(\tilde{g}_n)$, (g_n^*) , (g_n) , (f_n) zu N passend wie im Beweis von Satz 5.6 gewählt. Dann gibt es eine Teilfolge $n_1 < n_2 < \dots$, sodaß gilt :

- a) $\forall k \in \mathbb{N} : n_{k+1} > n_k + 2N + 2$;
dies hat zur Folge, daß $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l :$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_k(t, \theta) g_l(t, \theta) dt d\theta = 0$$

aufgrund der Orthogonalität der Legendrepolynome ;

- b) $\forall k \in \mathbb{N} : \|f_{n_k}\|_0 \geq 4^k \|g_{n_k}\|_{\alpha+k}'$.

Es konvergiert

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \frac{g_{n_k}}{\|g_{n_k}\|_{\alpha+k}'} \in \tilde{H}^{\alpha+k}$$

und g erfüllt die Bedingungen des Satzes :

- a) $g \in \tilde{H}^{\alpha+k}$ nach Definition,
- b) $\forall t, \theta \in \mathbb{R}, |t| > R : g(t, \theta) = 0$ nach Konstruktion der $(\tilde{g}_n)$ bzw. (g_n) ,

c) $\forall m \in \mathbb{N}_0$: $\int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \cdot) dt$ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten Grades auf $[0, \tau]$, das nur Anteile der Parität von m besitzt, denn die (g_{n_k}) erfüllen diese Bedingung nach Bemerkung 5.4.

Nun wird die Annahme $\exists f \in H_0^0(k(R))$: $R_{a, \tau} f = g|_{\mathbb{R} \times [0, \tau]}$ zum Widerspruch geführt.

Sei also f eine derartige Funktion und $g^* := Rf$. Dann ist

$$\forall k \in \mathbb{N}: \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_{n_k}(t) g^*(t, \cdot) dt$$

ein trigonometrisches Polynom endlichen Grades, das durch seine Werte auf $[0, \tau]$ eindeutig festgelegt ist.

Daher gilt

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g^*(t, \theta) g_{n_k}^*(t, \theta) dt d\theta =$$

$$2^{-k} \|g_{n_k}\|_{\alpha+k}^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_{n_k}^{*2}(t, \theta) dt d\theta =$$

$$2^{-k} \|g_{n_k}\|_{\alpha+k}^{-1} \|g_{n_k}^*\|_0^2.$$

Andererseits folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g^*(t, \theta) g_{n_k}^*(t, \theta) dt d\theta \leq \|g_{n_k}^*\|_0' \|g^*\|_0'$$

$$\leq \|g_{n_k}^*\|_0' \|g^*\|_k' \leq C_1 \|g_{n_k}^*\|_0' \|f\|_0.$$

Zusammen ergibt dies den gesuchten Widerspruch:

$$\|f\|_0 \geq C_2 2^{-k} \frac{\|g_{n_k}^*\|_0'}{\|g_{n_k}\|_{\alpha+k}'} \geq C \cdot 2^k.$$

Die Suche nach notwendigen und hinreichenden Konsistenzbedingungen, die wie jene in Satz 2.8 numerisch verwertbar, also zumindest stetig sind, endet genau wie im Fall der hohlen (Satz 3.7) und beschnittenen (Satz 4.10) Projektionen ergebnislos :

5.8 Satz

Sei $\kappa \geq 0$, $\tau \in]0, \tau[$, $R > 0$,

$\mu : \tilde{H}^{\kappa+\frac{1}{2}}(R) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

(1) $\forall g_1, g_2 \in \tilde{H}^{\kappa+\frac{1}{2}}(R)$, $g_1 = g_2$ auf $\mathbb{R} \times [0, \tau]$:

$$\mu(g_1) = \mu(g_2) \quad ,$$

(2) $\forall f \in H_0^\kappa(k(R))$: $\mu(Rf) = 0$.

Für alle g mit

a) $g \in \tilde{H}^{\kappa+\frac{1}{2}}(R)$,

b) $\forall m \in \mathbb{N}_0$: $\int_{\mathbb{R}} t^m g(t, \cdot) dt \mid [0, \tau]$ ist ein trigonometrisches Polynom höchstens m -ten

Grades, das nur Anteile der Parität von m besitzt, gilt dann :

$$\mu(g) = 0 \quad .$$

Beweis :

Sei g eine Funktion mit den Eigenschaften a) und b) . Dann läßt sich g entwickeln in der Form

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{c,k}(t) \cos(k\theta)$$

und g_n sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\forall t, \theta \in \mathbb{R} : g_n(t, \theta) := \sum_{k=1}^n g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^n g_{c,k}(t) \cos(k\theta) \quad .$$

Dann gilt nach Satz 5.5 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f_n \in H_0^\kappa(k(R)) : R_{a,\tau} f_n = g_n \mid \mathbb{R} \times [0, \tau]$$

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $g_n^* := Rf_n$.

Nach Voraussetzung (2) gilt $\mu(g_n^*) = 0$, also nach (1) auch $\mu(g_n^*) = \mu(g_n) = 0$. Da $g_n \rightarrow g$ in $\tilde{H}^{\alpha+k}$ und μ stetig ist, folgt: $\mu(g_n) \rightarrow \mu(g)$, also

$$\mu(g) = 0.$$

Nachdem also keine Aussicht besteht, wie im Falle vollständiger Daten durch stetige Konsistenzbedingungen zu klären, ob es ein Urbild bezüglich der angularbeschränkten Radontransformation gibt, wird nun der Frage nachgegangen, ob ein Inversionsoperator der angularbeschränkten Radontransformation stetig sein kann. Als Grundlage dient der Satz 5.6. Zur Formulierung eines Satzes über den Inversionsoperator der angularbeschränkten Radontransformation benötigen wir noch einige Definitionen:

5.9 Definition

Für $\tau \in]0, \infty[$, $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \geq 0$ sei

a) $\|\cdot\|'_\alpha$ definiert durch

$$\begin{aligned} &\forall g \in \tilde{H}_{a,\tau}^\alpha : \\ &\|g\|'_\alpha := \inf \{ \|h\|'_\alpha : h \in \tilde{H}^\alpha, g = h \text{ auf }]\mathbb{R} \times [0, \tau] \}, \end{aligned}$$

b) $T_{a,\tau,R}^\alpha := R_{a,\tau}(H_0^\alpha(k(R)))$,

c) $T(n) := \{ g \in \tilde{H}^0 : \exists (g_{s,k})_{k=1,\dots,n} \subset L_2^2(\mathbb{R}), \\ \exists (g_{c,k})_{k=0,\dots,n} \subset L_2^2(\mathbb{R}), \text{ soda\ss } \forall t, \theta \in \mathbb{R} : \\ g(t, \theta) = \sum_{k=1}^n g_{s,k}(t) \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^n g_{c,k}(t) \cos(k\theta) \},$

d) $T_{a,\tau,R}^\alpha(n) := T_{a,\tau,R}^\alpha \cap T(n)$.

5.10 Satz

Sei $\alpha, \beta \geq 0$, $\delta := \max(\alpha, \beta)$, $\sigma := \max(0, \beta - \alpha - \frac{1}{2})$, $\tau \in]0, \pi[$, $R > 0$,

$$R_{a, \tau}^{-1} : (R_{a, \tau}(H_0^\delta(\mathbb{R}^2)), \|\cdot\|_\beta) \longrightarrow (H_0^\alpha(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\alpha).$$

Dann gilt

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \|R_{a, \tau}^{-1} \big|_{T_{a, \tau, R}^\delta(n)}\| \geq C \quad n^{-\sigma} \sin^n(\frac{\tau}{2}).$$

Insbesondere ist $R_{a, \tau}^{-1} \big|_{T_{a, \tau, R}^\delta}$ unstetig.

Beweis : folgt sofort aus Satz 5.6.

Von einem Rekonstruktionsverfahren wird man zwar nicht unbedingt erwarten, daß es auf $T_{a, \tau, R}^\delta$ die angularbeschränkte Radonformation exakt invertiert, jedoch sollte der Inversionsoperator zumindest angenähert werden. Aber selbst dann ist der Rekonstruktionsoperator unstetig :

5.11 Satz

Sei $\alpha, \beta \geq 0$, $\delta := \max(\alpha, \beta)$, $\tau \in]0, \pi[$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in]0, 1[$,

$$R_{a, \tau}^{-1} : (R_{a, \tau}(H_0^\delta(\mathbb{R}^2)), \|\cdot\|_\beta) \longrightarrow (H_0^\alpha(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\alpha).$$

$$S_n : (T_{a, \tau, R}^\delta(n), \|\cdot\|_\beta) \longrightarrow (H_0^\alpha(k(R)), \|\cdot\|_\alpha), \quad \text{soda\ss}$$

$$\forall g \in T_{a, \tau, R}^\delta(n) : \quad \|R_{a, \tau}^{-1}g - S_n g\|_\alpha \leq \mu \|g\|_\beta.$$

Dann

$$\exists C > 0 : \quad \|S_n\| \geq C \quad n^{-\sigma} \sin^n(\frac{\tau}{2}) - \mu.$$

Dabei kann C unabhängig von n und μ gewählt werden.

Ist

$$S : (T_{a, \tau, R}^\delta, \|\cdot\|_\beta) \longrightarrow (H_0^\alpha(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\alpha), \quad \text{soda\ss}$$

$$\forall g \in T_{a, \tau, R}^\delta : \quad \|R_{a, \tau}^{-1}g - Sg\|_\alpha \leq \mu \|g\|_\beta,$$

so ist S unstetig.

Beweis :

Sei C die Konstante aus Satz 3.12. Dann

$\exists g \in T_{a, \tau, R}^{\delta}(n)$, $g \neq 0$: $\|R_{a, \tau}^{-1} g\|_{\kappa} \geq C n^{-\sigma} \sin^n(\frac{\tau}{2}) \|g\|_{\beta}$,
und daher

$$\begin{aligned} \|S_n g\|_{\kappa} &\geq \|R_{a, \tau}^{-1} g\|_{\kappa} - \|S_n g - R_{a, \tau}^{-1} g\|_{\kappa} \\ &\geq C n^{-\sigma} \sin^n(\frac{\tau}{2}) \|g\|_{\beta} - \mu \|g\|_{\beta} \\ &= (C n^{-\sigma} \sin^n(\frac{\tau}{2}) - \mu) \|g\|_{\beta}. \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Da

$C n^{-\sigma} \sin^n(\frac{\tau}{2}) - \mu \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$,
ergibt sich daraus auch sofort der zweite Teil.

§ 6 Schlußfolgerungen für die Bildrekonstruktion aus unvollständigen Daten

In den vorangegangenen Paragraphen wurden die drei klassischen Arten unvollständiger Daten in der Computer - Tomographie behandelt. In der Praxis treten unvollständige Daten in der Regel nicht in einer dieser idealisierten Formen auf. Die Probleme sind jedoch die gleichen und lassen sich auf ein oder mehrere der oben genannten Fälle zurückführen. Dies wird hier an einigen Beispielen demonstriert.

Außerdem möchte ich hier meine Erfahrungen, die ich in den vergangenen Jahren bei der numerischen Behandlung hohler Projektionen gewonnen habe, wiedergeben und sie den theoretischen Resultaten dieser Arbeit gegenüberstellen. Dies möge dazu beitragen, daß der Leser Arbeiten auf dem Gebiet unvollständiger Daten kritischer einschätzen kann und die Grenzen des Machbaren erkennt.

Wohl am häufigsten treten in der Praxis hohle Projektionen auf. Sie werden durch strahlenundurchlässige Metallgegenstände in der untersuchten Schicht hervorgerufen, die allerdings in der Regel nicht wie in § 3 vorausgesetzt zentral liegen und kreisförmig sind. Handelt es sich nur um einen Metallgegenstand, so fehlen genau jene Meßwerte, bei denen der Meßstrahl die konvexe Hülle H des Querschnittes dieses Gegenstandes schneidet. Durch Umbeschreiben von Kreisen um H und Anwendung von Satz 3.3 erkennt man, daß die Dichtefunktion außerhalb H durch die vorhandenen Projektionsdaten eindeutig bestimmt ist und offensichtlich innerhalb von H keinerlei Aussage möglich ist (Helgason [13], Kap. I, Korollar 2.8). Beschreibt man H einen Kreis ein bzw. um und wendet die Sätze des § 3 auf die durch diese Kreise erzeugten hohlen Projektionen an, so leitet man sofort folgende Ergebnisse für den allgemeinen Fall der durch ein beliebiges Objekt erzeugten hohlen Projektionen ab:

Es gibt keine stetigen notwendigen und hinreichenden Konsistenzbedingungen (Analogie zu Satz 3.7 zusammen mit Satz 3.6),

der Inversionsoperator ist unstetig, die Norm des Inversionsoperators divergiert bei Einschränkung auf Teilräume von Funktionen mit Fourierentwicklung höchstens n-ten Grades exponentiell mit n (Analogie zu Satz 3.12),

dasselbe gilt für Näherungen des Inversionsoperators (Analogie zu Satz 3.13).

Nicht ganz so trivial ist die Verallgemeinerung auf hohle Projektionen, die durch mehrere Metallgegenstände erzeugt werden. Dieses Problem tritt z.B. auf, wenn zwei Hüftimplantate eine Beckenaufnahme stören. Sind diese strahlenundurchlässig, so verliert man überraschenderweise die Eindeutigkeit der Bildrekonstruktion auch zwischen den beiden Objekten, unabhängig von deren Größe, Form und Entfernung. Dies wird in dem folgenden Satz präzisiert.

6.1 Satz

G_1 und G_2 seien disjunkte Gebiete in $\mathbb{R}^2$,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}: \omega(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

$$\omega^\perp(\theta) := (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

und

$$T := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{co}(G_1 \cup G_2) : f(x) = 0,$$

$$\forall s, \theta \in \mathbb{R}, (s\omega(\theta) + t\omega^\perp(\theta) : t \in \mathbb{R}) \cap (G_1 \cup G_2) = \emptyset :$$

$$Rf(s, \theta) = 0 \quad \} .$$

Dann gilt für alle offenen $U \subset \text{co}(G_1 \cup G_2)$:

$$\dim \{ f|_U : f \in T \} = \infty .$$

Erläuterung :

T umfaßt genau jene Funktionen f , deren hohle Projektionen bezüglich der beiden Gebiete G_1 und G_2 identisch 0 sind. Dennoch ist f innerhalb von $\text{co}(G_1 \cup G_2)$ nirgends eindeutig bestimmt.

Beweis :

Da eine Gerade ein Gebiet genau dann schneidet, wenn sie dessen konvexe Hülle schneidet, kann man o. B. d. A. annehmen, daß G_1 und G_2 konvexe Gebiete sind. Sei nun y ein fest gewählter Punkt in U .

Ist $y \in G_1$ oder $y \in G_2$, so liefern die hohlen Projektionen überhaupt keine Aussagen über f in einer hinreichend kleinen Umgebung von y . Beliebige C_0^∞ -Funktionen, deren Träger in dieser Umgebung von y liegt, gehören also zu T und der Satz ist bewiesen.

Ist jedoch $y \notin G_1 \cup G_2$, so gibt es $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ und $\mu \in]0,1[$ mit $y = \mu x_1 + (1-\mu)x_2$. Da G_1 und G_2 offen sind, kann man ein $\delta > 0$ finden, für das $k(x_1, \delta) \subset G_1$ und $k(x_2, \delta) \subset G_2$ gilt.

Die Wahl des Koordinatensystems hat keinen Einfluß auf die Aussage des Satzes. Daher kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $x_1 = (-1, 0)$ und $x_2 = (1, 0)$.

Nun werde der $\mathbb{R}^2$ der affinen Transformation

$$(s, t) \longrightarrow (s, \frac{2t}{\delta})$$

unterworfen und die Objekte im Bildraum mit " $\sim$ " bezeichnet. Dann gilt $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\tilde{y} = \mu \tilde{x}_1 + (1-\mu) \tilde{x}_2$ und $\tilde{y} \in k((0, 0), 1-\delta)$.

Aufgrund der Wahl von δ ist $\{(-1, \sigma) : \sigma \in]-1, 1[\} \subset \tilde{G}_1$ und $\{(1, \sigma) : \sigma \in]-1, 1[\} \subset \tilde{G}_2$ und damit $k((0, 0), 1) \subset \text{co}(\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2)$.

Diese Beziehungen werden durch Abbildung 6.1 auf der nächsten Seite veranschaulicht.

Wendet man nun Satz 4.5 mit $r := 1-\delta$, $R := 1$ auf die offenen Menge $\tilde{U} \cap k((0, 0), 1)$ an, so erhält man Funktionen $\tilde{f}$,

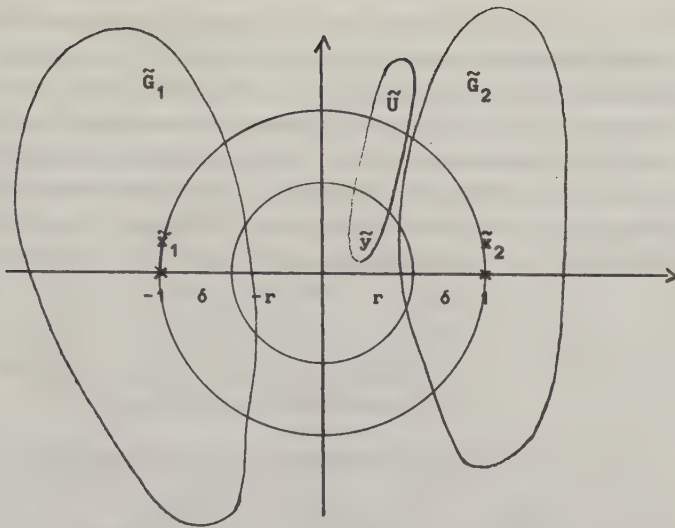


Abb. 6.1

die außerhalb von $k((0,0),1)$ gleich 0 sind, bei Einschränkung auf $\tilde{U} \cap k((0,0),1)$ einen unendlichdimensionalen Raum aufspannen und deren beschnittene Projektionen identisch gleich 0 sind. Erst recht sind alle jene Linienintegrale gleich 0, deren Integrationsgerade weder $\tilde{G}_1$ noch $\tilde{G}_2$ schneidet. Denn durch $\tilde{G}_1$ und $\tilde{G}_2$ werden bereits mehr Linienintegrale ausgeblendet, als bei den beschnittenen Projektionen fehlen.

Rücktransformation liefert nun die Behauptung, denn bei einer affinen Transformation gehen Geraden in Geraden über und Teilengenbeziehungen bleiben erhalten.

Liegen in der untersuchten Schicht zwei strahlenundurchlässige Hüftimplantate mit Querschnitt G und H , so ist die Dichtefunktion durch die hohlen Projektionen zwar außerhalb der konvexen Hülle von $G \cup H$ eindeutig bestimmt, innerhalb von $\text{co}(G \cup H)$ ist nach Satz 6.1 Eindeutigkeit nirgends gewährleistet. Innerhalb von $\text{co}(G)$ und $\text{co}(H)$ ist sogar keinerlei Aussage über die Dichteverteilung möglich. Dies wird in Abbildung 6.2 veranschaulicht :

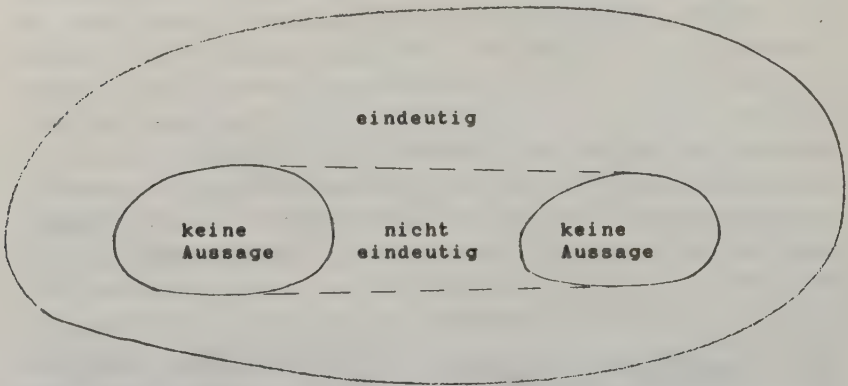


Abb. 6.2 Hohle Projektionen bei zwei Implantaten

Von kommerziellen Computertomographen werden auch im Falle mehrerer strahlenundurchlässiger Objekte in der untersuchten Schicht Bilder erzeugt, die nach den obigen Ergebnissen weitgehend dem Zufall überlassen sind. Satz 6.1 relativiert den diagnostischen Wert solcher Bilder erheblich und sollte dem Radiologen zumindest anschaulich bekannt gemacht werden.

An dieser Stelle möchte ich numerische Erfahrungen einfließen lassen, die ich im Rahmen meiner zahnmedizinischen

Promotion an einem Siemens - Tomographen gewonnen habe. Dort [3] ging es um die Entwicklung eines Verfahrens zur Bildrekonstruktion aus hohlen Projektionen, die durch Metallgegenstände beliebiger Lage und Form hervorgerufen werden. Das Verfahren wurde zunächst auf einem Großrechner ausgetestet und die Dichtefunktion, wie bei fast allen Veröffentlichungen üblich, als dreidimensionales Dichtegebirge dargestellt. Der Bildteil in diesem Paragraphen zeigt ein solches Beispiel. Die Dichteverteilung f ist gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in k((0.5, 0), 0.2) \\ 0.6 & \text{falls } x \in k((-0.5, 0.5), 0.1) \\ 0.2 & \text{sonst, falls } x \in k((0, 0), 1) \\ 0 & \text{außerhalb von } k((0, 0), 1) \end{cases}$$

und in folgender Abbildung dargestellt :

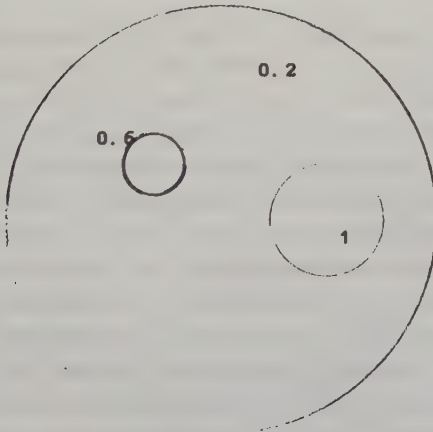


Abb. 6.3 Zylinderphantom

Da bei der Darstellung von f als Dichtegebirge Zylinder entstehen, wurde hier die Bezeichnung Zylinderphantom ge-

wählt. Auf jeder der folgenden Bildseiten ist auf der oberen Seitenhälfte das vollständige Bild gezeichnet, während die untere ein Querschnitt desselben ist.

Abbildung 6.4/6.5 zeigt das Original auf einem 40×40 - Raster ($n_x = 40$, $n_y = 40$), Abbildung 6.6/6.7 die Bildrekonstruktion aus vollständigen Daten aus $n_\varphi = 100$ Projektionen mit je $n_r = 60$ Linienintegralen. Ab Abbildung 6.8 werden hohle Projektionen betrachtet, die durch einen zentralen Kreis mit Radius $1/3$ erzeugt werden. Die fehlenden Projektionswerte wurden zunächst durch lineare Interpolation (Abb. 6.8/6.9) ergänzt und anschließend (ab Abb. 6.10) so modifiziert, daß die Konsistenzbedingung d) aus Satz 2.8 bis zum Grad "grad" = $1, 2, \dots$ erfüllt ist. Zunächst ist eine deutliche Verbesserung der Bildqualität erkennbar, diese schlägt jedoch, wie in Satz 3.12 vorausgesagt wurde, in Divergenz um.

Besonders ernüchternd waren die Bilder am Computertomographen, der Dichtewerte als Grautöne auf einem Monitor wiedergibt. Freilich wurden auch dort Bilder, die vorwiegend großflächige Strukturen enthalten, besser. Sobald jedoch eine Vielzahl kleiner Details auftreten und Meßfehler hinzukommen, versagte das Verfahren weitgehend. Sicherlich wurden großflächige Artefakte beseitigt, die vielen feinen Streifenartefakte jedoch kaum reduziert. Der Grund ist in der Unstetigkeit des Inversionsoperators zu suchen, die Schwierigkeiten bei hohen Frequenzen sind in Anbetracht von Satz 3.12 zu erwarten. Die Streifenartefakte stören das Bild aber bereits so nachhaltig, daß es nicht gelingen kann, für die medizinische Anwendung brauchbare Bilder aus unvollständigen Daten zu erzeugen.

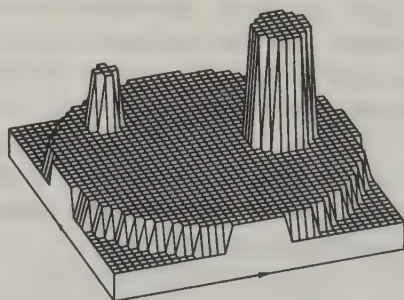
Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Bildrekonstruktion aus unvollständigen Daten enthalten oft nur die dreidimensionalen Bilder. Nach dem oben gesagten sollte man dort die feinen streifenförmigen Artefakte besonders kritisch betrachten und nach dem Verhalten der vorgeschlagenen Rekonstruktionsmethoden bei gestörten Daten fragen.

Gerade die feinen Artefakte vermögen das Bild in der Grauwertdarstellung restlos unbrauchbar zu machen. Es ist auch kein Ausweg, in der Medizin auf dreidimensionale Bilder auszuweichen. Denn die oben genannten Güteunterschiede beruhen darauf, daß in den Grauwertbildern wesentlich feinere Details zum Ausdruck kommen, die der Arzt für seine Untersuchung dringend benötigt.

Damit dürfte die Aussichtslosigkeit einer medizinisch brauchbaren Bildrekonstruktion aus unvollständigen Daten in der Computer - Tomographie feststehen.

Abb. 6.4

Zylinder - Phantom
Original

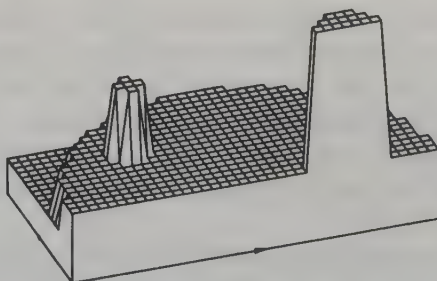


$n_x = 40$

$n_y = 40$

Abb. 6.5

Zylinder - Phantom
Original



$n_x = 40$

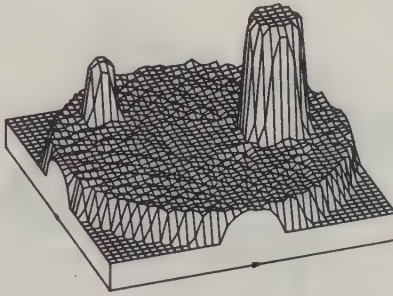
$n_y = 40$

Abb. 6.6

Zylinder - Phantom

Rekonstruktion aus vollständigen Daten

Hochauflösendes Filter



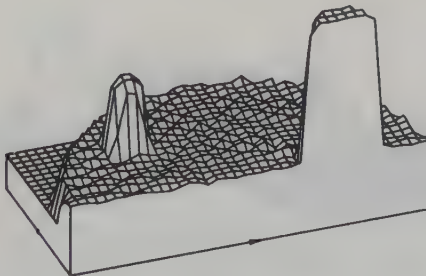
$n_x = 40$ $n_y = 40$ $n_\phi = 100$ $n_r = 60$
quadratisches Fehlermittel : $0.316E-01$

Abb. 6.7

Zylinder - Phantom

Rekonstruktion aus vollständigen Daten

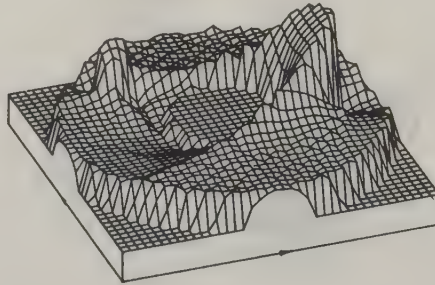
Hochauflösendes Filter



$n_x = 40$ $n_y = 40$ $n_\phi = 100$ $n_r = 60$
quadratisches Fehlermittel : $0.316E-01$

Abb. 6.8

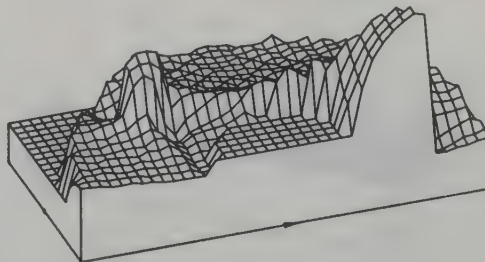
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit linearer Interpolation
Hochauflösendes Filter



rad = .33
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.109E+00

Abb. 6.9

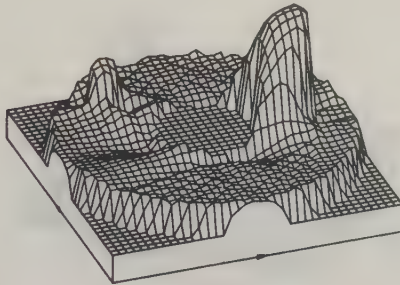
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit linearer Interpolation
Hochauflösendes Filter



rad = .33
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.109E+00

Abb. 6.10

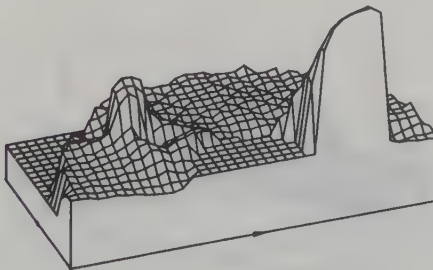
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 1
nx = 40 ny = 40 n ϕ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.708E-01

Abb. 6.11

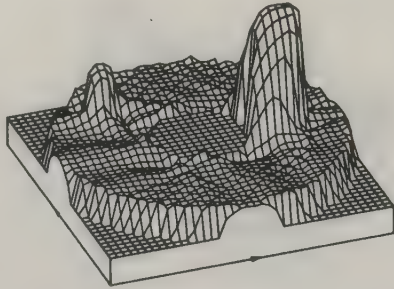
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 1
nx = 40 ny = 40 n ϕ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.708E-01

Abb. 6.12

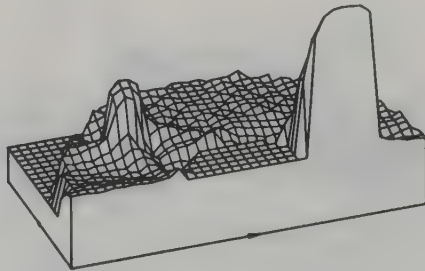
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 2
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.606E-01

Abb. 6.13

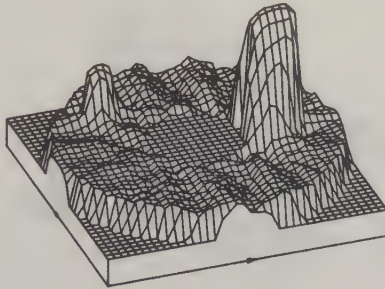
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 2
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.606E-01

Abb. 6.14

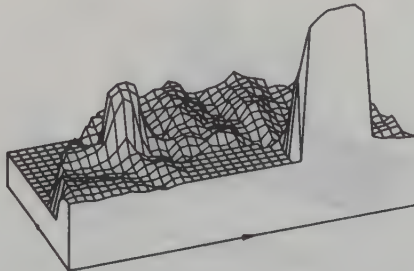
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 3
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.594E-01

Abb. 6.15

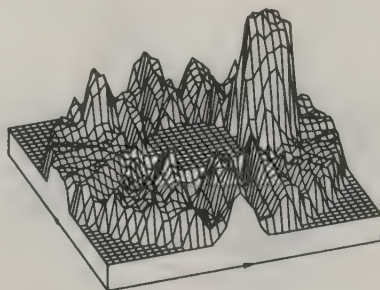
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 3
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.594E-01

Abb. 6.16

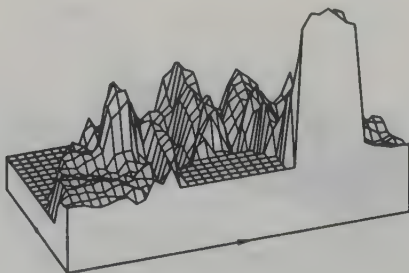
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 4
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.103E+00

Abb. 6.17

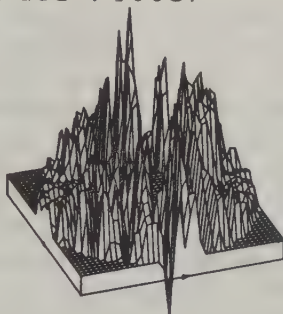
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 4
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.103E+00

Abb. 6.18

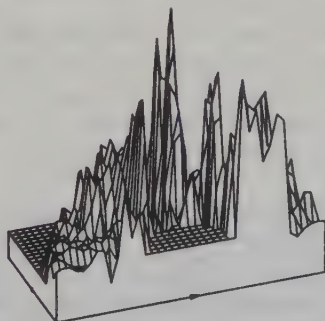
Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 5
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.380E+00

Abb. 6.19

Zylinder - Phantom
Rekonstruktion aus hohlen Projektionen
mit konsistenter Ergänzung
Hochauflösendes Filter



rad = .33 grad = 5
nx = 40 ny = 40 nφ = 100 nr = 60
quadratisches Fehlermittel : 0.380E+00

Zusammenfassung

In der Computer - Tomographie verfügt man häufig nicht über einen kompletten Projektionsdatensatz, sondern es fehlen bestimmte Projektionen oder Projektionsteile in charakteristischer Weise. Viele Anstrengungen wurden unternommen, um auch in solchen Fällen Bilder zu rekonstruieren. Die Ergebnisse waren jedoch nicht befriedigend. Diese Arbeit soll dazu beitragen, die Gründe dafür aufzuzeigen.

Die klassischen Arten unvollständiger Daten sind die hohlen, die beschnittenen und die angularbeschränkten Projektionen. In den Paragraphen 3 bis 5 werden sie der Reihe nach behandelt und die wichtigsten theoretischen Fragen beantwortet. Eine Übersicht über die grundlegenden Aussagen ist in Abbildung 7.1 zu finden.

Aus der Literatur ist bekannt, daß hohle Projektionen die Dichtefunktion außerhalb eines Kreises eindeutig bestimmen, während angularbeschränkte Projektionen die Dichtefunktion sogar überall eindeutig bestimmen. Ganz anders ist dies bei beschnittenen Projektionen. Satz 4.3 - 4.6 zeigen in sehr allgemeiner Form, daß nirgends Eindeutigkeit gewährleistet ist.

Bevor man den Inversionsoperator betrachten kann, sollte man sich Klarheit über den Bildraum der unvollständigen Projektionen verschaffen. Es wird also nach stetigen notwendigen und hinreichenden Konsistenzbedingungen gesucht, die gewährleisten, daß es eine Dichtefunktion gibt, deren unvollständige Projektionen mit den vorgegebenen übereinstimmen. Die von Ludwig (Satz 2.8) angegebenen stetigen Konsistenzbedingungen für vollständige Daten, die dort notwendig und hinreichend sind, können teilweise übertragen werden, am besten bei angularbeschränkten Projektionen. Es wird aber gezeigt, daß die abgeleiteten Konsistenzbedingungen nicht hinreichend sind. In allen drei Fällen bilden diese Bedingungen zusammen mit der Forderung einer endlichen Fourierentwicklung ein System hinreichender Konsistenzbedingungen. Es gelingt jedoch nicht, ein numerisch verwertbares System notwendiger und hinreichender Konsistenzbedingungen anzugeben. Denn keine stetige Konsistenzbedingung geht über die abgeleiteten Bedingungen hinaus.

Also gibt es keine Möglichkeit, Meßfehler in den unvollständigen Projektionen numerisch zu erkennen und zu eliminieren. Aus obigen Resultaten kann man zwar bereits die Unstetigkeit des Inversionsoperators bei unvollständigen Daten erkennen, wie schlimm es um das Wohlverhalten des Inversionsoperators wirklich bestellt ist, wird durch Konstruktion von Projektionsdaten gezeigt, die zu Dichtefunktionen führen, deren Norm vergleichsweise erschreckend groß sind. Genauer gesagt wird gezeigt, daß der Inversionsoperator bei Einschränkung

auf Teilräume von Funktionen endlicher Fourierreentwicklung bis zum Grad n zwar stetig ist, die Normen jedoch exponentiell mit n wachsen. Dies bedeutet in der Praxis, daß die Auflösung der Tomographiebilder in angularer Richtung nur sehr schlecht sein kann.

Die Betrachtungen dieser Arbeit beschränken sich zwar auf die drei klassischen Arten unvollständiger Daten, lassen sich aber leicht auf allgemeinere Fälle übertragen. Dies wurde in § 6 exemplarisch getan. Dabei ergab sich unter anderem das folgende sehr überraschende Ergebnis: Liegen in einer Schicht zwei strahlenundurchlässige Objekte, wie z.B. zwei Hüftimplantate, so kann über die Dichteverteilung innerhalb der konvexen Hülle ihrer Umrisse unabhängig von deren Form und Lage keine eindeutige Aussage getroffen werden.

Nachdem ich mich selbst jahrelang mit der Bildrekonstruktion aus unvollständigen Daten in der Computer - Tomographie beschäftigt habe, hoffe ich, ausgehend von meinen praktischen Erfahrungen ein gutes Stück zur theoretischen Untermauerung beigetragen und durch Gegenüberstellung von Theorie und Praxis die Grenzen des Machbaren aufgezeigt zu haben. Darüberhinaus war es mir ein Anliegen, dem Leser Anhaltspunkte zur kritischen Beurteilung von Arbeiten auf diesem Gebiet zu vermitteln.

Abb. 7.1 Übersicht über die grundlegenden Ergebnisse dieser Arbeit

	vollständige Daten	hohle Projektionen	beschnittene Projektionen	angularbeschränkte Projektionen
Eindeutigkeit der Rekonstruktion	ja, überall Satz 2.4	ja, teilweise Satz 3.3	nein, nirgends Satz 4.3-4.6	ja, überall Satz 5.3
Übertragbarkeit der notwendigen Konsistenzbedingungen aus Satz 2.8 (Ludwig)		nur teilweise, Satz 3.5	nur teilweise, Satz 4.7	ja, vollständig, Satz 5.4
Existenz stetiger, notwendiger und hinreichender Konsistenzbedingungen	ja, Satz 2.8, Überlegungen vor Satz 3.7	nein, Satz 3.6, Satz 3.7	nein, Satz 4.9, Satz 4.10	nein, Satz 5.7, Satz 5.8
Stetigkeit des Inversionsoperators	ja, Satz 2.6	nein, Satz 3.12	nein, Satz 4.12	nein, Satz 5.10
Verhalten der Norm des Inversionsopera- tors bei Einschränkung auf Teilräume von Funktionen endlicher Fourierentwicklung bis zum Grad n	konvergent, folgt sofort aus Satz 2.6	divergent, und zwar exponentiell mit n , Satz 3.12	divergent, und zwar exponentiell mit n , Satz 4.12	divergent, und zwar exponentiell mit n , Satz 5.10
Verhalten von Näherungen des Inversionsoperators bezüglich Stetigkeit und Norm bei Ein- schränkung wie oben	völlig analog	wie der	Inversionsoperator	selbst
	offensichtlich	Satz 3.13	Satz 4.13	Satz 5.11

Aus der Literatur übernommene Aussagen sind eingerahmt

L i t e r a t u r

1. Adams, A. : Sobolev spaces.
Academic press, 1975.
2. Bartmann, A. : Hohle und beschnittene Projektionen in der Computer - Tomographie.
Diplomarbeit an der Fakultät für Mathematik der Ludwig Maximilians - Universität München, 1983.
3. Bartmann, A. : Numerische Behandlung von Lochprojektionen in der Computer - Tomographie.
Dissertation an der medizinischen Fakultät der Ludwig Maximilians - Universität München, 1985.
4. Bracewell, R.N., Riddle, A.C. : Inversion of fan - beam scans in radio astronomy.
Astrophys. J. 150 (1967), 427 - 434.
5. Chang, T., Herman, G.T. : A scientific study of filter selection for a fan - beam convolution reconstruction algorithm.
SIAM J. Appl. Math. 39 (1980), 83 - 105.
6. Cormack, A.M. : Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications.
J. Appl. Phys. 34 (1963), 2722 - 2727.
7. Cormack, A.M. : Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II.
J. Appl. Phys. 35 (1964), 2908 - 2913.
8. Deans, S.R. : The Radon transform and some of its applications.
Wiley, 1983.
9. Grünbaum, F.A. : A study of Fourier space methods for "limited angle" reconstruction.
Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 2 (1980), 31 - 42.
10. Hamaker, C., Solmon, D.C. : The angles between the null spaces of X rays.
J. Math. Anal. Appl. 62 (1978), 1 - 23.
11. Hamaker, C., Smith, K.T., Solmon, D.C., Wagner, S.L. : The divergent beam X-ray transform.
Rocky Mountain J. of Math. 10 (1980), 253 - 283.
12. Helgason, S. : The Radon transform on Euclidean spaces, compact two - point homogeneous spaces and Grassmann manifolds.
Acta Math. 113 (1965), 153 - 180.

13. Helgason, S. : The Radon transform.
Birkhäuser, Progress in Mathematics 5, 1980.
14. Herman, G.T. : Image reconstruction from projections.
The fundamentals of computerized tomography.
Academic press, 1980.
15. Herman, G.T. : Image reconstruction from projections.
Implementation and applications.
Springer Verlag, 1979.
16. Herman, G.T., Naparstek, A. : Fast image reconstruction
based on a Radon inversion formula appropriate for
rapidly collected data.
SIAM J. Appl. Math. 33 (1977), 511 - 533.
17. Katz, M.B. : Questions of uniqueness and resolution in
reconstruction from projections.
Springer Verlag, 1978.
18. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from
projections I : General theoretical considerations.
Optik 50 (1978), 19 - 33.
19. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T., Peters, T.M. : Image
reconstruction from projections II : Modified
back-projection methods.
Optik 50 (1978), 85 - 109.
20. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from
projections III : Projection completion methods
(theory).
Optik 50 (1978), 189 - 204.
21. Lewitt, R.M., Bates, R.H.T. : Image reconstruction from
projections IV : Projection completion methods
(computational examples).
Optik 50 (1978), 269 - 278.
22. Lewitt, R.M. : Ultra - fast convolution approximations
for computerized tomography.
IEEE Trans. Nucl. Sci. 26 (1979), 2678 - 2681.
23. Lions, J.L., Magenes, E. : Non - homogeneous boundary
value problems and applications I.
Springer Verlag, Grundlehren Band 181, 1972.
24. Logan, B.F. : The uncertainty principle in
reconstructing functions from projections.
Duke Math. J. 42 (1975), 661 - 706.

25. Logan, B.F., Shepp, L.A. : Optimal reconstruction of a function from its projections.
Duke Math. J. 42 (1975), 645 - 659.
26. Louis, A. : Picture reconstruction from projections in restricted range.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (1980), 209 - 220.
27. Louis, A. : Numerische Rekonstruktion von Bildern bei unvollständigen Daten.
ZAMM 60 (1980), T 301 - T 303.
28. Louis, A. : Ghosts in tomography - the null space of the Radon transform.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 3 (1981), 1 - 10.
29. Ludwig, D. : The Radon transform on Euclidean space.
Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 49 - 81.
30. Marr, R.B. On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals.
J. Math. Anal. Appl. 45 (1974), 357 - 374.
31. Natterer, F. : A Sobolev space analysis of picture reconstruction.
SIAM J. Appl. Math. 39 (1980), 402 - 411.
32. Natterer, F. : Efficient implementation of 'optimal' algorithms in computerized tomography.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (1980), 545 - 555.
33. Natterer, F. : Genauigkeitsfragen bei der numerischen Rekonstruktion von Bildern.
Birkhäuser, ISNM 49 (1979), 131 - 146.
34. Natterer, F. : Numerik des Radonschen Problems.
Jber. d. Dt. Math.-Verein. 87 (1985), 108 - 126.
35. Natterer, F. : Einige Beiträge der Mathematik zur Computer - Tomographie.
ZAMM 64 (1984), T 252 - T 260.
36. Perry, R.M. : On reconstructing a function on the exterior of a disk from its Radon transform.
J. Math. Anal. Appl. 59 (1977), 324 - 341.
37. Polya, G., Szegő, G. : Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II.
Springer, 1971.

38. Quinto, E.T. : Singular value decompositions and inversion methods for the exterior Radon transform and a spherical transform.
J. Math. Anal. Appl., to appear.
39. Radon, J. : Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.
Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. 69 (1917), 262 - 277.
40. Ramachandran, G.N., Lakshminarayanan, A.V. : Three - dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs : application of convolution instead of Fourier transforms.
Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68 (1971), 2236 - 2240.
41. Rowland, S.W. : Computer implementation of image reconstruction formulas. In Herman, G.T. : Image reconstruction from projections. Implementation and applications.
Springer, 1979, 9 - 80.
42. Rudin, W. : Real and complex analysis.
Tata Mc Graw Hill, 1981.
43. Shepp, L.A., Kruskal, J.B. : Computerized tomography : The new medical X-ray technology.
Amer. Math. Monthly 85 (1978), 420 - 439.
44. Smith, K.T., Solmon, D.C., Wagner, S.L. : Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs.
Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 1227 - 1270.
45. Solmon, D.C. : The X-ray transform.
J. Math. Anal. Appl. 56 (1976), 61 - 83.
46. Strichartz, R.S. : Radon inversion - variations on a theme.
Am. Math. Monthly 89 (1982), 377 - 384.
47. Triebel, H. : Interpolation theory, function spaces, differential operators.
North Holland Publishing Company, 1978.
48. Tuy, H. : Reconstruction of a three-dimensional object from a limited range of views.
J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), 598 - 616.
49. Weidmann, J. : Linear operators in Hilbert spaces.
Springer, Graduate Texts in Mathematics 68, 1980.

L e b e n s l a u f

Alexander Bartmann, geboren am 25. November 1959 in München
Eltern : Dr. med. Willy und Dr. med. Sigrid Bartmann

Schulbildung in München :

Grundschule an der Farinellistraße	1966 - 1970
Oskar von Miller - Gymnasium	1970 - 1979
Abitur	Juni 1979

Studium an der Ludwig Maximilians - Universität in München :

Zahnheilkunde 1979 - 1985

naturwissenschaftliche Vorprüfung	Oktober 1980
zahnärztliche Vorprüfung	April 1982
Staatsexamen	Januar 1985
Approbation	Februar 1985
Promotion (Dr. med. dent.)	Dezember 1985

Mathematik 1980 - 1983

Vordiplom	April 1981
Diplom	März 1983

Ableistung des Wehrdienstes bei der deutschen Bundeswehr als
Truppenzahnarzt April 1985 - Juni 1986

